Corrigé de l'exercice 1

▶**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{t+6}{2t+1}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t+1=0$.

$$\begin{aligned} 2t+1 &= 0 \\ 2t &= -1 \\ t &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$g'(t) = \frac{11 \times (2t+1) - (t+6) \times 2}{(2t+1)^2} = \frac{-11}{(2t+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(2t+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-11 < 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	0		10
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	6	$\searrow$	$\dfrac{16}{21}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 7$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 6x^2 - 12x + 6$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 6 \times 6 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ a une seule racine $x_0 = \dfrac{-(-12)}{2 \times 6} = 1$.
Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ s'annule une seule fois pour $x_0 = 1$ et est toujours du signe de a.

x	-10		1		10
$p'(x)$		$+$	0	$+$	

Donc la fonction polynômiale p est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 8]$ par $k(t) = \dfrac{2t+8}{t-9}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t-9=0$.

$$\begin{aligned} t-9 &= 0 \\ t &= 9 \end{aligned}$$

Or 9 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 8]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10 \ ; \ 8]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (t-9) - (2t+8) \times 11}{(t-9)^2} = \frac{-26}{(t-9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(t-9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-26 < 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		8
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$\frac{12}{19}$	$\searrow$	-24

►2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ sur $[-10 \ ; \ 10]$.
$f'(x) = 3x^2 + 3x$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 0 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-3-\sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{-3-\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{-3-3}{6} \\ &= \frac{-6}{6} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3+\sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{-3+\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{-3+3}{6} \\ &= \frac{0}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-1		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-1		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-849	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$1\,151$

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10 \ ; \ 1]$ par $k(t) = \frac{2t-7}{4t-6}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4t - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 4t - 6 &= 0 \\ 4t &= 6 \\ t &= \frac{6}{4} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{3}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 1]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (4t-6) - (2t-7) \times 4}{(4t-6)^2} = \frac{16}{(4t-6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(4t-6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $16 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	-10		1
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$\dfrac{27}{46}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 - 27x^2 + 48x + 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 6x^2 - 54x + 48$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-54)^2 - 4 \times 6 \times 48 = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-54) - \sqrt{1\,764}}{2 \times 6} &= \frac{54 - \sqrt{1\,764}}{12}\\ &= \frac{54-42}{12}\\ &= \frac{12}{12}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-54) + \sqrt{1\,764}}{2 \times 6} &= \frac{54 + \sqrt{1\,764}}{12}\\ &= \frac{54+42}{12}\\ &= \frac{96}{12}\\ &= 8\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 8$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		1		8		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		1		8		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-5\,170$	$\nearrow$	33	$\searrow$	-310	$\nearrow$	-210

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $h(t) = \dfrac{-t-8}{-2t+1}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2t+1=0$.

$$\begin{aligned}-2t+1&=0\\ -2t&=-1\\ t&=\frac{-1}{-2}\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ -1]$.

$$h'(t)=\frac{(-11)\times(-2t+1)-(-t-8)\times(-2)}{(-2t+1)^2}=\frac{-17}{(-2t+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-2t+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-17<0$ donc pour tout t de I, $h'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	-10		-1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{2}{21}$	$\searrow$	$-\frac{7}{3}$

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x)=x^3+3x^2-72x-5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x)=3x^2+6x-72$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta=6^2-4\times3\times(-72)=900$ et $\sqrt{900}=30$.
Comme $\Delta>0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{900}}{2\times3}&=\frac{-6-\sqrt{900}}{6}\\&=\frac{-6-30}{6}\\&=\frac{-36}{6}\\&=-6\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{900}}{2\times3}&=\frac{-6+\sqrt{900}}{6}\\&=\frac{-6+30}{6}\\&=\frac{24}{6}\\&=4\end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1=-6$ et $x_2=4$.
Comme $\Delta>0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		4		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-6		4		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	15	$\nearrow$	319	$\searrow$	-181	$\nearrow$	575

Corrigé de l'exercice 5

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 2]$ par $h(t) = \dfrac{5t-4}{3t-7}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3t-7=0$.

$$\begin{aligned} 3t-7 &= 0 \\ 3t &= 7 \\ t &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{7}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 2]$.

$$h'(t) = \frac{5 \times (3t-7) - (5t-4) \times 3}{(3t-7)^2} = \frac{-23}{(3t-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(3t-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-23 < 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{54}{37}$	↘	-6

►2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 - \dfrac{27}{2}x^2 + 60x + 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$k'(x) = 3x^2 - 27x + 60$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 3 \times 60 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-27)-\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{27-\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{27-3}{6} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{-(-27)+\sqrt{9}}{2\times 3} &= \frac{27+\sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{27+3}{6} \\ &= \frac{30}{6} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 4$ et $x_2 = 5$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		4		5		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		4		5		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-2\,948$	$\nearrow$	90	$\searrow$	$\dfrac{179}{2}$	$\nearrow$	252