∽ Corrigé du baccalauréat ES/L Antilles-Guyane ∾
10 septembre 2019

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. L'équation $\ln 5 + \ln(x+1) = 1$ a pour solution :

a. $x = \mathrm{e} - 6$ **b.** $x = -1$ **c.** $\boxed{x = \frac{1}{5}\mathrm{e} - 1}$ **d.** $x = -0{,}5$

$\ln 5 + \ln(x+1) = 1 \iff \ln(5(x+1)) = \ln \mathrm{e} \iff 5(x+1) = \mathrm{e} \iff 5x+5 = \mathrm{e} \iff x = \frac{1}{5}\mathrm{e} - 1$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - x$. Le nombre $f'(2)$ est égal à :

a. -1 **b.** $\boxed{0}$ **c.** $2\ln 2 - 2$ **d.** $2\ln 2 - 1$

$f(x) = 2\ln(x) - x$ donc $f'(x) = 2\frac{1}{x} - 1$ donc $f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 0$

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est :

a. $n = \ln\left(\frac{175}{2}\right)$ **b.** $n = 7$ **c.** $\boxed{n = 8}$ **d.** $n = \ln 175 - \ln 2$

$2^7 = 128 < 175$ et $2^8 = 256 > 175$

4. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;\,-1]$. On note f' sa dérivée et F une de ses primitives. On sait que pour tout x de l'intervalle $[-3\,;\,-1]$, $f'(x) > 0$.
On peut affirmer que, sur l'intervalle $[-3\,;\,-1]$, la fonction F est :

a. décroissante ; **b.** strictement croissante ; **c.** $\boxed{\text{convexe ;}}$ **d.** négative.

$f'(x > 0) \iff F''(x) > 0$ donc la fonction F est convexe.

Exercice 2 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

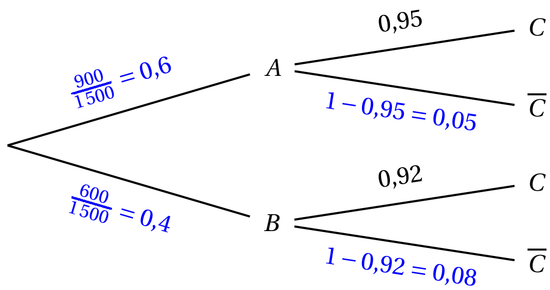
Un grossiste en flacons de parfum souhaite étudier la qualité des flacons qu'il reçoit.
Il a reçu 1 500 flacons d'un certain modèle provenant de deux sites de production différents, le site A et le site B. Sur les 1 500 flacons de ce modèle reçus, 900 proviennent du site A, les autres du site B.

Partie A

Le grossiste s'intéresse à l'aspect du flacon. Parmi les flacons provenant du site A, 95 % ont un aspect conforme au cahier des charges tandis que 92 % des flacons provenant du site B ont un aspect conforme. Il prélève au hasard un des flacons qu'il a reçus lors de la dernière livraison.

On note : A l'évènement « Le flacon provient du site A » ;
B l'évènement « Le flacon provient du site B » ;
C l'évènement « Le flacon a un aspect conforme au cahier des charges ».

On résume les informations dans un arbre pondéré.



1. « Le flacon provient du site A et a un aspect conforme au cahier des charges » est l'événement $A\cap C$.
   $P(A\cap C)=P(A)\times P_A(C)=0,6\times 0,95=0,57$
2. La probabilité que le flacon ait un aspect conforme au cahier des charges est $P(C)$.
   D'après la formule des probabilités totales : $P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=0,57+0,4\times 0,92=0,938$.
3. Le flacon prélevé se trouve avoir un aspect non conforme.
   La probabilité qu'il provienne du site B est $P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{P\left(\overline{C}\cap B\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\dfrac{0,4\times 0,08}{1-0,938}\approx 0,516$.

Partie B

Le grossiste souhaite également étudier le volume de parfum contenu dans les flacons qu'il a reçus lors de la dernière livraison.
On considère qu'un flacon est correctement rempli s'il contient plus de 98 ml de parfum.
On admet que le volume de parfum, exprimé en millilitre, contenu dans un flacon prélevé au hasard peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart type $\sigma=1$.
La probabilité qu'un flacon prélevé au hasard soit correctement rempli est $P(X>98)\approx 0,977$.

Partie C

Le producteur du site A indique que le pourcentage de flacons « correctement remplis » est de 96 %.
Le grossiste contrôle un échantillon de 120 flacons prélevés au hasard dans la livraison du producteur du site A et compte 18 flacons qui ne sont pas correctement remplis. Le grossiste met alors en doute l'affirmation du producteur.
On va tester l'hypothèse que la proportion p de flacons « correctement remplis » est de 0,96 sur un échantillon de taille $n=120$.
On va utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,96-1,96\frac{\sqrt{0,96\times 0,04}}{\sqrt{120}}\ ;\ 0,96+1,96\frac{\sqrt{0,96\times 0,04}}{\sqrt{120}}\right]$$
$$\approx\left[0,925\ ;\ 0,995\right]$$

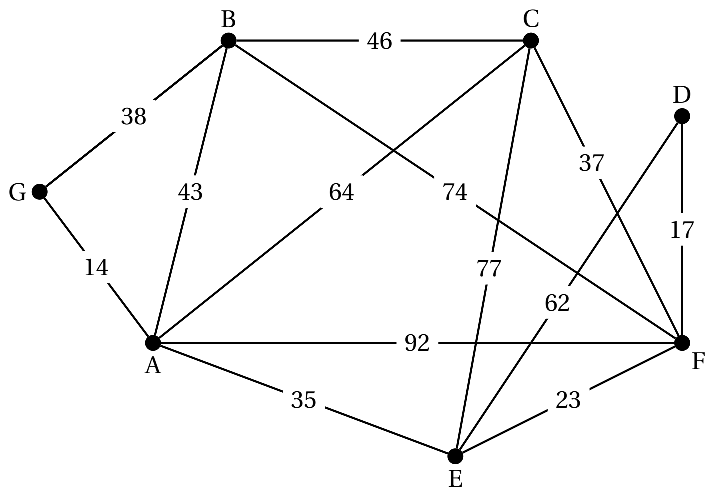
La proportion de flacons « correctement remplis » dans l'échantillon considéré est $f=\dfrac{120-18}{120}=0,85$.
Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique calculé, donc le grossiste a un argument pour contester l'affirmation du producteur.

Remarque du correcteur
Une des conditions pour pouvoir utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique est $n\left(1-p\right)\geqslant 5$ or dans cet exercice, $n\left(1-p\right)=120\times 0,04=4,8<5$.

Exercice 2 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Suite à des intempéries, un chasse-neige doit déblayer toutes les routes reliant les stations de son secteur. On modélise ce secteur par le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les différentes stations désignées par des lettres. Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, du chasse-neige entre deux stations.



1. Le chasse-neige part de la station G.

   On détermine les sommets de ce graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	5	4	4	2	4	5	2

   Tous les sommets ne sont pas de degré pair, donc, d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de cycle eulérien, c'est-à-dire de trajet qui parte d'un sommet et qui y revienne en étant passé une et une seule fois par chaque arête.

2. Une saleuse doit de même parcourir l'ensemble des routes du secteur après déblaiement de la neige. Elle est garée à la station A et, après son travail, peut se garer dans n'importe quelle station.

   Le chemin G - A - B - C - E - D - F permet de relier deux sommets quelconques du graphe, donc ce graphe est connexe.

   De plus ce graphe possède exactement deux sommets de degrés impairs, A et F de degré 5, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe des chaines eulériennes partant de A et arrivant à F, c'est-à-dire des trajets partant de A et rejoignant F en passant une et une seule fois par chaque arête.

   La saleuse peut donc parcourir une et une seule fois chacune des routes pour traiter l'ensemble du secteur en partant de A ; et en fin de parcours, elle sera au sommet F.

3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique et on donne : $M^4 = \begin{pmatrix} 61 & 48 & 52 & 28 & 45 & 55 & 24 \\ 48 & 44 & 41 & 21 & 42 & 45 & 20 \\ 52 & 41 & 50 & 25 & 41 & 52 & 25 \\ 28 & 21 & 25 & 15 & 20 & 24 & 10 \\ 45 & 42 & 41 & 20 & 44 & 48 & 21 \\ 55 & 45 & 52 & 24 & 48 & 61 & 28 \\ 24 & 20 & 25 & \mathbf{10} & 21 & 28 & 15 \end{pmatrix}$.

   La matrice M^4 donne le nombre de chemins allant d'un sommet à un autre. Le nombre 10 est situé sur la ligne 7 correspondant au sommet G, et sur la colonne 4 correspondant au sommet D : il y a donc 10 chemins de longueur 4 reliant le sommet G au sommet D.

4. On va déterminer le chemin le plus rapide pour aller de la station G à la station D en utilisant l'algorithme de Dijkstra.

G	A	B	C	D	E	F	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	G
	~~∞~~ 14 G	~~∞~~ 38 G	∞	∞	∞	∞	A (14)
		38 G ~~57 A~~	~~∞~~ 78 A	∞	~~∞~~ 49 A	~~∞~~ 106 A	B (38)
			78 A ~~84 B~~	∞	49 A	106 A ~~112 B~~	E (49)
			78 A ~~126 E~~	~~∞~~ 111 E		~~106 A~~ 72 E	F (78)
			78 A ~~115 F~~	~~111 E~~ 89 F			C (78)
				89 F			D (89)

Le chemin le plus rapide pour aller de G à D est : G $\xrightarrow{14}$ A $\xrightarrow{35}$ E $\xrightarrow{23}$ F $\xrightarrow{17}$ D ; sa durée est de 89 minutes.

5. Le conducteur du chasse-neige part de la station G et va directement à la station A.
Il apprend alors que la route allant de la station E à la station F est barrée.
Le chemin le plus rapide est alors G $\xrightarrow{14}$ A $\xrightarrow{35}$ E $\xrightarrow{62}$ D ; sa durée est de 111 minutes.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un particulier souhaite réaménager l'espace paysager de sa parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2018. Pour cela, il se fixe un plan progressif qui consiste à couper chaque année 20 % des arbres et à planter 600 nouveaux pieds d'arbre.
On modélise l'évolution du nombre d'arbres de cette parcelle par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'arbres de la parcelle en $2018+n$, ainsi $u_0 = 10000$.

Partie A

1. a. $u_1 = u_0 - u_0 \times \dfrac{20}{100} + 600 = 10000 - 10000 \times \dfrac{20}{100} + 600 = 8600$

$u_2 = u_1 - u_1 \times \dfrac{20}{100} + 600 = 8600 - 8600 \times \dfrac{20}{100} + 600 = 7480$

b. Retirer 20 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$.

On passe de l'année n à l'année $n+1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 600 donc on a pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 600$.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3000$ pour tout entier naturel n. On peut donc déduire que, pour tout n, $u_n = v_n + 3000$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0{,}8u_n + 600 - 3000 = 0{,}8\,(v_n + 3000) - 2400 = 0{,}8v_n + 2400 - 2400 = 0{,}8v_n$
- $v_0 = u_0 - 3000 = 10000 - 3000 = 7000$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = 7000$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 7000 \times 0{,}8^n$.

c. Comme $u_n = v_n + 3000$, on déduit que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 7000 \times 0{,}8^n + 3000$.

d. On suppose que le réaménagement de cette parcelle se poursuit selon ce même modèle.
Comme $0 < 0{,}8 < 1$, d'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que la limite de la suite (v_n) est 0, et donc que la limite de la suite (u_n) est 3 000.
Le nombre d'arbres de cette parcelle va donc tendre vers 3 000.

Partie B

Le propriétaire de la parcelle souhaite conserver au moins 4 000 arbres sur sa parcelle. Il cherche à déterminer l'année où il devra cesser son plan de réaménagement progressif.

1. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Dans les algorithmes ci-dessous, U est un nombre réel et N est un nombre entier.
Parmi ces algorithmes ci-dessous, un seul donne le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'arbres devienne inférieur ou égal à 4 000.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3

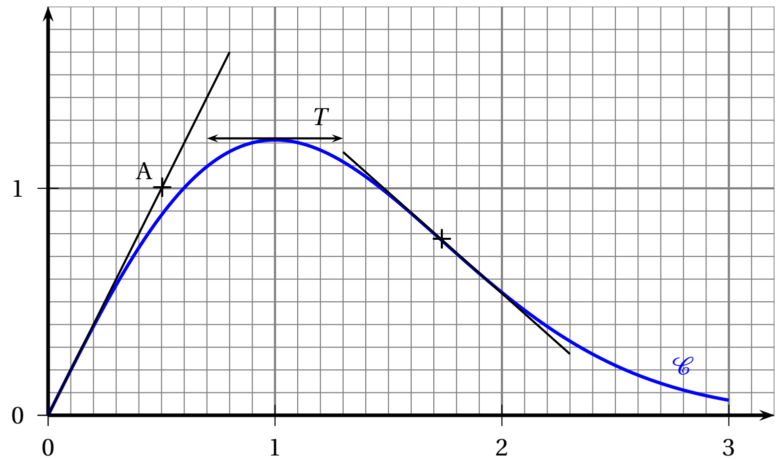
$U \leftarrow 10000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U \leqslant 4000$
    $N \leftarrow N+1$
    $U \leftarrow 0{,}8 \times U + 600$
Fin Tant que
	$U \leftarrow 10000$
	$N \leftarrow 0$
	Tant que $U > 4000$
	    $N \leftarrow N+1$
	    $U \leftarrow 0{,}8^N \times U + 600$
	Fin Tant que
		$U \leftarrow 10000$
		$N \leftarrow 0$
		Tant que $U > 4000$
		    $N \leftarrow N+1$
		    $U \leftarrow 0{,}8 \times U + 600$
		Fin Tant que

- Dans l'algorithme 1, la condition d'entrée dans la boucle « Tant que » est $U \leqslant 4000$; or la variable U est initialisée à 10 000, donc on n'entre jamais dans la boucle.
L'algorithme 1 ne convient donc pas.
- Dans l'algorithme 2, la variable U est modifiée par l'affectation $U \leftarrow 0{,}8^N \times U + 600$ qui ne correspond pas à la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 600$.
L'algorithme 2 ne convient donc pas.

2. À la calculatrice on trouve $u_8 \approx 4174$ et $u_9 \approx 3940$; comme la suite (u_n) est décroissante, $n = 9$ est la plus petite valeur pour laquelle $u_n < 4000$. Le propriétaire doit donc cesser son plan de réaménagement en $2016 + 9$ soit en 2027.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats
Cet exercice comporte trois parties.

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées $(0{,}5 ; 1)$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point O et le point A (0,5 ; 1).
   Son équation est donc de la forme $y = mx$ avec $m = \dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{0,5}{1} = 2$.
   La droite $\mathscr{D}$ a donc pour équation $y = 2x$.
2. Au point d'abscisse 1, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale T, donc $f'(1) = 0$.
3. La fonction est concave quand sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses tangentes, ce qui est le cas par exemple sur [0 ; 1].

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle [0; 3] par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0; 3].
   a. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-0,5x^2} + 2x \times (-0,5 \times 2x)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2} = \left(2 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$
   b. de variation. $f'(x) = \left(2 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$; or $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - 2x^2$.
   $2 - 2x^2 = 2(1 - x^2) = 2(1 - x)(1 + x)$

x	0		1		3
$1 - x$		+	0	−	
$1 + x$		+		+	
$\mathrm{e}^{-0,5x^2}$		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	

$f(0) = 0$, $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-0,5} \approx 1,21$ et $f(3) = 6\,\mathrm{e}^{-4,5} \approx 0,067$

On peut établir le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\approx 1,21$	↘	$\approx 0,067$

2. On admet que la fonction F, définie par $F(x) = -2\,\text{e}^{-0,5x^2}$, est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;3]$.
La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;3]$ est :
$\dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x = \dfrac{1}{3}\big(F(3)-F(0)\big) = \dfrac{1}{3}\big(-2\,\text{e}^{-4,5} - (-2)\big) = \dfrac{2-2\,\text{e}^{-4,5}}{3} \approx 0,659$

Partie C

En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.
Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x, exprimé en mois.
Un journal affirme que cet hiver :

— « Le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million. »
Le maximum de la fonction f est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) \approx 1,21$; donc le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie est de 1,21 million.
L'affirmation est **vraie**.

— « Le nombre moyen de lits occupés sur les trois mois a été d'environ 400 000. »
Le nombre moyen de lits occupés sur les trois mois est la valeur moyenne de la fonction f entre 0 et 3 donc vaut environ 0,659 million soit 659 000.
L'affirmation est **fausse**.