


Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie

19 novembre 2015

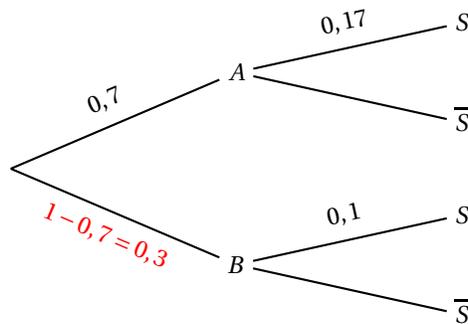
EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On regroupe les données de l'énoncé dans un arbre pondéré :



- Il suffit de lire l'énoncé : $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.
- D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,117 + P(B) \times P_B(S) \\
 &= 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149
 \end{aligned}$$

- La probabilité cherchée correspond à $P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,119}{0,149} \approx 0,799$.
- Soit p la proportion sur l'ensemble de la production de la source A de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire. La fréquence observée sur l'échantillon de taille $n = 1000$ est $f_{\text{obs}} = \frac{211}{1000} = 0,211$.
Comme $n = 1000 \geq 30$, $nf_{\text{obs}} = 211 \geq 5$ et $n(1 - f_{\text{obs}}) = 789 \geq 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on peut proposer un intervalle de confiance au seuil de 95 % qui est :

$$\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,179; 0,243].$$

Partie B

- Comme $\mu = 8$ et $\sigma = 1,6$, $P(6,4 \leq X \leq 9,6) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.
- À la calculatrice, on trouve : $P(X \leq 6,5) \approx 0,174$.
- La question revient à résoudre l'équation en σ : $P(Y \leq 6,5) = 0,1$.

D'après le cours, si la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type σ , alors la variable aléatoire $Z = \frac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$Y \leq 6,5 \iff Y - 9 \leq -2,5 \iff \frac{Y-9}{\sigma} \leq -\frac{2,5}{\sigma} \iff Z \leq -\frac{2,5}{\sigma} \text{ donc}$$

$$P(Y \leq 6,5) = 0,1 \iff P\left(Z \leq -\frac{2,5}{\sigma}\right) \leq 0,1$$

On cherche, à la calculatrice, le réel β tel que $P(Z \leq \beta) = 0,1$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite; on trouve $\beta \approx -1,282$.

$$\beta \approx -1,282 \iff -\frac{2,5}{\sigma} \approx -1,282 \iff \sigma \approx 1,95$$

Partie C

1. Comme $a \cos x \geq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'aire du domaine cherchée correspond, en unités d'aire, à la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx = a [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a(1 - (-1)) = 2a$$

2. Le problème revient à résoudre l'équation en a :

$$2a - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff a - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0 \iff a(4 - \pi a) = 0$$

Comme a est strictement positif, la seule solution possible est $a = \frac{4}{\pi} > 0$.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = e^{x-a} - 2$$

$$f'_a(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$$

$f'_a(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à

$$f_a(a + \ln 2) = e^{a + \ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a.$$

x	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f'_a(x)$		-	+
f_a			

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur \mathbb{R} et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

$$\varphi'(a) = -2 + e^a;$$

$$\bullet -2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2;$$

$$\bullet -2 + e^a < 0 \iff e^a < 2 \iff a < \ln 2;$$

$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
φ			

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à

$$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2.$$

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que (P_2) est fausse. Par exemple, le triplet $(1; 1; 1)$ convient : $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \geq \frac{1}{3}$ mais $1 + 1 + 1 = 3 \neq 1$.

Partie B

1. a. Il suffit de vérifier que les trois points non alignés B , D et E appartiennent au plan d'équation $x + y + z = 1$.

Avec $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$, c'est bien le cas :

$$1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1 = 1.$$

- b. Il suffit de montrer que le vecteur \overrightarrow{AG} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) . Prenons \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{BE} , par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0 \implies \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0 \implies \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$$

Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

- c. D'après la question précédente, on sait que (AG) et (BDE) sont sécants en un unique point. Il suffit donc de prouver que K appartient à la droite et au plan.

— Comme $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, le point K appartient à (AG) .

— Comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, le point K appartient à (BDE) .

Donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) .

2. Les côtés du triangle BDE sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur et BDE est un triangle équilatéral.
3. a. Si M est un point du plan (BDE) distinct de K , d'après la question (1b), le triangle AMK est rectangle en K . D'après le théorème de Pythagore, on a alors :

$$AM^2 = AK^2 + MK^2$$

Si $M = K$, la relation est encore vraie donc elle est vraie pour tout point M de (BDE) .

- b. Comme $MK^2 \geq 0$, la relation $AM^2 \geq AK^2$ se déduit trivialement de la précédente.
- c. Soient x , y et z trois nombres réels vérifiant l'égalité $x + y + z = 1$. Le point $M(x; y; z)$ appartient donc au plan (BDE) . D'après (3b), on a alors $AM^2 \geq AK^2$ qui s'écrit, avec les coordonnées :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

L'implication (P_1) est donc vraie.

EXERCICE 4

5 points

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{cases}$$

2. a. On obtient en sortie $D = 250$ et $A = 420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (1).
- b. • Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E , déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D , A et E sont des réels			
Entrée :	Saisir n			
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n			
Traitement :	Pour k variant de 1 à n <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="color: red;">E prend la valeur D</td> </tr> <tr> <td>D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$</td> </tr> <tr> <td>A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$</td> </tr> </table> Fin de Pour	E prend la valeur D	D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$	A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$
E prend la valeur D				
D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$				
A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$				
Sortie :	Afficher D Afficher A			

- On peut aussi plus simplement inverser les deux instructions d'affectation à A et à D :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D , A sont des réels		
Entrée :	Saisir n		
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n		
Traitement :	Pour k variant de 1 à n <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$</td> </tr> <tr> <td>$D$ prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$</td> </tr> </table> Fin de Pour	A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$	D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$			
D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$			
Sortie :	Afficher D Afficher A		

3. a. Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

- b. D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 200$.

La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. a. $2n^2 - (n+1)^2 = ((\sqrt{2}-1)n-1)((\sqrt{2}+1)n+1)$.

D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré,

$$2n^2 - (n+1)^2 \text{ est donc positif pour } n \leq -\frac{1}{\sqrt{2}+1} \text{ ou } n \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,4.$$

Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$

b. *Initialisation* : pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que pour tout entier $k > 4$, $2^k \geq k^2$.

En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geq 2k^2 \geq (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geq n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4 d'après le principe de récurrence.

c. D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on a $0 < n^2 \leq 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur \mathbb{R}_+^* et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \implies 0 < 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

d. D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 340$$

EXERCICE 4

5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois $n+1$ sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit $\frac{1}{2}d_n$, de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit $\frac{1}{2}a_n$ et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$$

b. En posant $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

c. *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I_2 + T)$.

Hérédité : supposons que la relation soit vérifiée pour tout entier k non nul. En multipliant l'expression $A^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT)$ par $A = \frac{1}{2}(I_2 + T)$ à gauche ou à droite car I_2 et T commutent, on obtient :

$$A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (I_2 + kT) \times \frac{1}{2}(I_2 + T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + T + kT + kT^2).$$

Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

Donc $A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (I_2 + (k+1)T)$ et la relation est héréditaire.

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Comme $\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$, la matrice $I_2 - A$ est inversible et on a $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} D'où C = AC + B &\iff (I_2 - A)C = B \iff C = (I_2 - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = C = AC + B.$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n$$

c. On a $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$.

$$\text{Par définition de } V_n, \text{ on a aussi : } U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le résultat de la question (1c), on obtient, par calcul matriciel :

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. a. En admettant que pour $n \geq 4$, $2^n \geq n^2 > 0$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on obtient $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification :

$$0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

b. D'après les théorèmes d'encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

D'après les résultats sur les limites de suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$, on

sait aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.