

❧ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ❧
12 juin 2015

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

1. $\vec{AI} = \frac{1}{6}\vec{AB} \iff \vec{AB} = 6\vec{AI} \iff B(6; 0; 0);$

$\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD} \iff \vec{AD} = 4\vec{AJ} \iff D(0; 4; 0);$

$\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AE} \iff \vec{AE} = 2\vec{AK} \iff K(0; 0; 2).$

Comme $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 6\vec{AI} + 4\vec{AJ} + 2\vec{AK}$, donc $G(6; 4; 2)$.

On en déduit que $\vec{IG}(-1; 1; 0)$ et $\vec{JG}(6; 3; 2)$.

Or $\vec{n} \cdot \vec{IG} = -2 + 2 + 0 = 0$ et

$\vec{n} \cdot \vec{JG} = 12 + 6 - 18 = 0.$

Le vecteur \vec{n} est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.

2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :

$M(x; y; z) \in (IJG) \iff 2x + 2y - 9z + d = 0.$

En particulier : $I(1; 0; 0) \in (IJG) \iff 2 + 0 - 0 + d = 0 \iff d = -2.$

Une équation du plan (IJG) est : $M(x; y; z) \in (IJG) \iff 2x + 2y - 9z - 2 = 0.$

3. On a $\vec{aAF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \vec{AE}$, donc $F(6; 0; 2)$.

Or $M(x; y; z) \in (BF) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{BM} = t\vec{BF} \iff$

$$\begin{cases} x - 6 = t(6 - 6) \\ y - 0 = t(0 - 0) \\ z - 0 = t(2 - 0) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

Donc si $M(x; y; z) \in (IJG) \cap (BF)$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t \\ 2x + 2y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \implies 2 \times 6 + 0 - 9 \times 2t - 2 = 0 \iff 10 - 18t = 0 \iff$$

$10 = 18t \iff t = \frac{5}{9}.$

En remplaçant t par $\frac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :

$L\left(6; 0; \frac{10}{9}\right).$

4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).

La section avec (ABFE) est la droite (IL).

La section avec (BCGF) est la droite (LG).

Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IJ) et (GP) sont parallèles.

On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.

La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. $M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \iff z^2 + 3z + 3 = 0$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2.$$

Cette équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{On a } |z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}.$$

Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.

$$\text{On a donc } z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

On trouve de la même façon que $z_2 = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2. On a $z_A = z_2$, donc $|z_A| = OA = |z_2| = \sqrt{3}$.

De même $z_B = z_1$, donc $|z_B| = OB = |z_1| = \sqrt{3}$.

$$\text{Enfin } AB = |z_B - z_A| = \left| \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \right) \right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}.$$

On a donc $OA = OB = AB = \sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son point associé.

M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.

Or on sait que l'affixe du point M est :

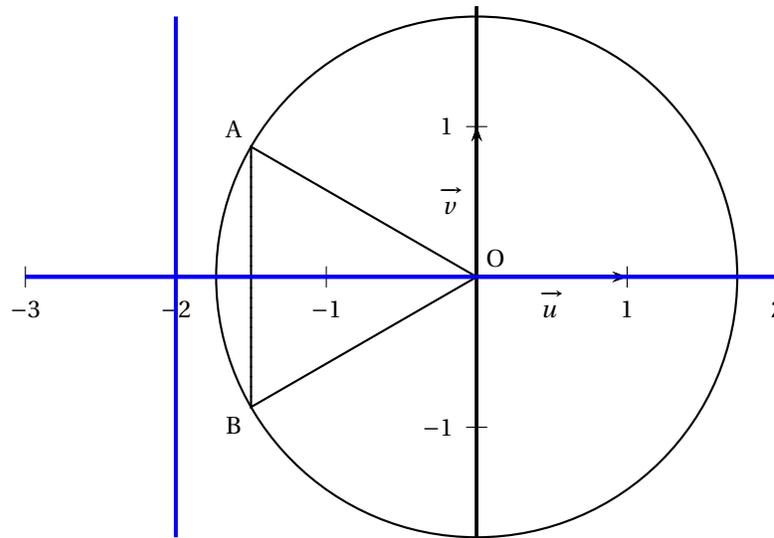
$$z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 - y^2 + 2ixy + 4x + 4iy + 3 = x^2 - y^2 + 3 + i(2xy + 4y).$$

$$\text{On a donc } y' = 0 \iff 2xy + 4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble \mathcal{E} est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).

4.



EXERCICE 3

3 points

Commun à tous les candidats

1. On sait que $P(\mu_1 - 2\sigma_1 \leq X_1 \leq \mu_1 + 2\sigma_1) \approx 0,95$, soit $P(1,53 \leq X_1 \leq 1,77) \approx 0,95$.

2. a. On sait que $P(X_2 \geq 170) = 0,5 + P(170 \leq X_2 \leq 175) \approx 0,5 + 0,18 \approx 0,68$.

b. Soit F l'évènement « la personne choisie est une femme » et S l'évènement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». On a $P(F) = 0,52$ et donc $P(\overline{F}) = 0,48$. La probabilité cherchée est $P_S(F)$.

De même qu'à la question 2. a. la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre est

$$P(X_1 \geq 170) = 0,5 - P(165 \leq X_2 \leq 170) \approx 0,2. \text{ Soit } P_F(S) \approx 0,2.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap F) + P(S \cap \overline{F}) = P(F) \times P_F(S) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S) \approx 0,52 \times 0,2 + 0,48 \times 0,68 \approx 0,4304.$$

$$\text{Donc } P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{P_F(S) \times P(F)}{P(S)} \approx \frac{0,2 \times 0,52}{0,4304} \approx \frac{0,104}{0,4304} \approx 0,24.$$

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A Modélisation

- On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1) = 0$.
Or f est dérivable sur $[1; 8]$ et sur cet intervalle :
 $f'(x) = ae^{-x} + (ax + b) \times (-1)e^{-x} = e^{-x}(a - ax - b)$.
Donc $f'(1) = 0 \iff e^{-1}(a - a - b) = 1 \iff -be^{-1} = 0 \iff b = 0$, car $e^{-1} \neq 0$.
- Le haut de la courbe est obtenu pour $x = 1$. Or :
 $3,5 < f(1) < 4 \iff 3,5 < ae^{-1} < 4 \iff 3,5e < a < 4e$.
Or $3,5e \approx 9,5$ et $4e \approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a = 10$.
On a donc sur $[1; 8]$, $f(x) = 10xe^{-x}$.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

- En dérivant g comme un produit, on a pour tout réel de $[1; 8]$:
 $g'(x) = 10 \times (-1)e^{-x} + 10(-x-1) \times (-1)e^{-x} = -10e^{-x}(1-x-1) = 10xe^{-x} = f(x)$.
 g est donc une primitive de f sur $[1; 8]$.
- Comme $x > 0$ et $e^{-x} > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[1; 8]$. Donc l'aire de la surface hachurée est égale en unités d'aire (soit $1 \times 1 = 1 \text{ m}^2$) à l'intégrale :
$$\int_1^8 f(x) dx = [g(x)]_1^8 = g(8) - g(1) = 10(-8-1)e^{-8} - 10(-1-1)e^{-1} = 20e^{-1} - 90e^{-8}$$
.
D'après les conditions du peintre son devis sera donc d'un montant de :
 $D = 300 + 50(20e^{-1} - 90e^{-8}) \approx 666,37 \text{ €}$.

Partie C Une contrainte à vérifier

- La fonction f' est dérivable sur $[1; 8]$ et sur cet intervalle $[1; 8]$:
 $f''(x) = 10 \times (-1)e^{-x} + 10(1-x) \times (-1)10e^{-x} = 10e^{-x}(-1-1+x) = 10(x-2)e^{-x}$.
Comme $e^{-x} > 0$ quel que soit le réel x , le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$.
 - Si $1 \leq x < 2$, $x-2 < 0$: la fonction f' est donc décroissante sur $[1; 2[$;
 - Si $2 < x \leq 8$, $x-2 > 0$: la fonction f' est donc croissante sur $]2; 8]$;
 - Si $x = 2$, $f'(2) = -10e^{-2} \approx -1,35$ est donc le minimum de la fonction f' sur $[1; 8]$.
- Une équation de la tangente (T_M) au point $M(x; y)$ est :
 $P(X; Y) \in (T_M) \iff Y - f(x) = f'(x)(X - x)$.
Le point L est le point de cette droite d'ordonnée nulle donc son abscisse X vérifie :
$$-f(x) = f'(x)(X - x) \iff X - x = \frac{-f(x)}{f'(x)} \iff X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
.
Dans le triangle MLP , on $\tan \alpha = \frac{PM}{PL} = \frac{f(x)}{\left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x \right|} = \frac{f(x)}{\left| -\frac{f(x)}{f'(x)} \right|} =$
 $| -f'(x) | = | f'(x) |$.
- On a vu dans l'étude de la fonction f' que celle-ci décroît de $f'(1) = 10(1-1)e^{-1} = 0$ à $-1,35$ puis croissante de $f'(2)$ à $f'(8) = 10(1-8)e^{-8} = -70e^{-8} \approx -0,023$.
Le maximum de la fonction $|f'(x)|$ est donc $1,35 \approx \tan 53,47^\circ$
Cette valeur est bien inférieure à la valeur 55° . Le toboggan est conforme.

EXERCICE 5

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur $\ln(2)$ S prend la valeur v
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire v prend la valeur $\ln(2 - e^{v_n})$ S prend la valeur $S + v$ Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = e^{v_1} = e^{\ln(2)} = 2$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln(2 - e^{-v_n})} = (2 - e^{-v_n}) = 2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

2. D'après le résultat précédent :

$$u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

3. Démonstration par récurrence :

Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;*Hérédité* : Supposons qu'il existe un naturel $p > 4$ tel que $u_p = \frac{p+1}{p}$.

On a $u_{p+1} = 2 - \frac{1}{u_p} = 2 - \frac{p}{p+1} = \frac{2p+2-p}{p+1} = \frac{p+2}{p+1}$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

Partie C – Étude de (S_n) 1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = e^{v_n} \iff v_n = \ln u_n$.

De la question précédente on peut écrire :

$$v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = -\ln n + \ln(n+1).$$

2. $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 + \ln 4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$ (ou $2\ln 2$).

3. $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 + \ln 4 + \dots - \ln(n-1) + \ln n - \ln n + \ln(n+1) = -\ln 1 + (\ln 2 - \ln 2) + (\ln 3 - \ln 3) + (\ln 4 - \ln 4) + \dots + (\ln(n-1) - \ln(n-1)) + (\ln n - \ln n) + \ln(n+1) = -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = A^2$$

2. En partant de l'égalité $A^2 = A + 2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :

$$A^3 = A(A + 2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I \text{ et on recommence :}$$

$$A^4 = A \times A^3 = A(3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I) + 2A = 5A + 6I$$

3. Démonstration par récurrence

- *Initialisation* : Pour $n = 0$, $A^0 = I = 0A + 1I = r_0A + s_0I$. la relation est vraie au rang 0.

- *Hérédité* : Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_pA + s_pI$. En multipliant chaque membre par A , on obtient :

$$A \times A^p = A(r_pA + s_pI) \iff A^{p+1} = r_pA^2 + s_pA = r_p(A + 2I) + s_pA =$$

$$(r_p + s_p)A + 2r_pI = r_{p+1}A + s_{p+1}I : \text{ la relation est donc vraie au rang } p + 1.$$

- On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = r_nA + s_nI.$$

4. On a pour tout entier naturel n non nul :

$$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -(r_n - s_n) = -k_n.$$

L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1 .

On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n$.

$$5. r_1 = r_0 + s_0 = 1 \text{ donc } t_1 = r_1 + \frac{(-1)^1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{On sait qu'alors pour tout } n \geq 1, t_n = t_1 \times q^{n-1} = \frac{2}{3} 2^{n-1} = \frac{1}{3} 2^n$$

$$6. \text{ On a donc } r_n = t_n - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{(-1)^n}{3}$$

Pour tout $n \geq 1$, $k_n = r_n - s_n$ et $k_n = -(-1)^n$; on en déduit que

$$s_n = r_n + (-1)^n = \frac{1}{3} 2^n - \frac{1}{3}(-1)^n + (-1)^n = \frac{1}{3} 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$$

$$7. A_n = r_nA + s_nI \text{ donc } A_n = \begin{pmatrix} -4r_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}$$

- $-4r_n + s_n = -\frac{4}{3} 2^n + \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n = -2^n + 2(-1)^n$

- $6r_n = \frac{6}{3} 2^n - \frac{6}{3}(-1)^n = 2^{n+1} - 2(-1)^n$

- $-3r_n = -3 \left(\frac{1}{3} 2^n - \frac{1}{3}(-1)^n \right) = -2^n + (-1)^n$

- $5r_n + s_n = \frac{5}{3} 2^n - \frac{5}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n = 2 \times 2^n - (-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$

$$\text{Conclusion : } A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$$

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1

