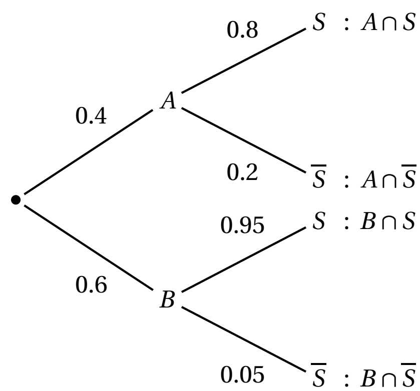
Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion
20 juin 2016

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Utilisons un arbre pondéré :



Les hypothèses s'écrivent :
$\mathrm{P}(A) = 0,4 \quad \mathrm{P}_A\left(\overline{S}\right) = 0,2 \quad \mathrm{P}_B\left(\overline{S}\right) = 0,05.$
On en déduit :
$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = 0,6$
$\mathrm{P}_A(S) = 1 - \mathrm{P}_A(\overline{S}) = 1 - 0,2 = 0,8$
$\mathrm{P}_B(S) = 1 - \mathrm{P}_B(\overline{S}) = 1 - 0,05 = 0,95$

On a ensuite :
$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(A \cap S) + \mathrm{P}(B \cap S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,89$

2. Calculons $\mathrm{P}_S(A)$:

$$\mathrm{P}_S(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap S)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89}$$

Une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité cherchée est $0,36$.

Partie B

1. Notons f la fréquence observée de composants sans défaut .

On a $\begin{cases} f = 0,92 \geqslant 30 \\ n \times f = 400 \times 0,92 = 368 \geqslant 5 \\ n(1-f) = 400 \times 0,08 = 32 \geqslant 5 \end{cases}$

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.
Un intervalle de confiance de la proportion p, au niveau de confiance $0,95$ est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\,0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87\,;0,97]$$

2. Pour un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

dont l'amplitude est

$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

L'amplitude est au maximum égale à $0,02$ si et seulement si $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02$ (1)

$$\begin{aligned} (1) \quad &\iff \quad 2 \leqslant 0,02\sqrt{n} \\ &\iff \quad \sqrt{n} \geqslant 100 \\ &\iff \quad n \geqslant 10000 \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon est 10000

Partie C

1. **a.**

P$(T \leqslant a)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

b. Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T \leqslant t) &= \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t \\
&= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0}\right) \\
&= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - (-1) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

c. De $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t \overset{\lambda > 0}{=} -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}\right.$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$.

On a ensuite, par somme : $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = 1 - 0 = 1$:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1$$

2. L'hypothèse s'écrit : $1 - \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0,5 \\
&\iff \quad -7\lambda = \ln \frac{1}{2} \\
&\iff \quad -7\lambda = -\ln 2 \\
&\iff \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}
\end{aligned}$$

Une valeur approchée de λ, à 10^{-3} près, est $0,099$

3. **a.** La question est de déterminer P$(T \geqslant 5)$.

Puisque P$(T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,099 \times 5}$, alors

$$\mathrm{P}(T \geqslant 5) = \mathrm{P}(T > 5) = 1 - \mathrm{P}(T \leqslant 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,099 \times 5}\right) = \mathrm{e}^{-5 \times 0,099} = \mathrm{e}^{-0,495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ $0,61$

b. Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7)$$

La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$\mathrm{P}_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7) = \mathrm{P}(T \geqslant 5)$$

La probabilité cherchée est environ $0,61$

c. $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}$:

Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Affirmation 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Puisque $\dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$:
$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\times 2 + 1\times(-2) + (-1)\times(-2) = 0$
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\times(-2) + 1\times(-2) + (-1)\times(-2) = 0$
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :

• Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0\times(-1) + 1\times(-1) + (-1)\times 1 = -2$$

Puisque $\vec{n}.\overrightarrow{EF} \neq 0$, alors

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

• Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :
Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_C}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1,0,1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés :

$$I \in (EF)$$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est alors

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1-t\\ y=-2-t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=3+t\end{array}\right.$$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathscr{P}$: Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, ce dernier a une équation de la forme

$$y-z+d=0 \text{ où } d\in\mathbb{R}$$

Puisque $A(1,2,3)$ est un point de $\mathscr{P}$, alors $y_A-z_A+d=0$, soit $d=-y_A+z_A=1$

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $y-z+1=0$

• Déterminons $(EF)\cap\mathscr{P}$:
Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_M=-1-t\\ y_M=-2-t\\ z_M=3+t\end{array}\right.$$

M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y_M-z_M+1=0$, i.e :

$$-2-t-(3+t)+1=0$$

soit

$$t=-2$$

La droite (EF) et le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1-(-2),-2-(-2),3+(-2))=(1,0,1)$
Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :
Le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2},\frac{z_B+z_C}{2}\right)=(1,0,1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

• Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

— Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

  D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

  Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-1+4=3\neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

— Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

L'égalité ci-dessus est équivalente au système :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Seconde méthode :

• Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

La droite (AB) passe par A(1 ; 2 ; 3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

La droite (CD) passe par C(-1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

• Déterminons $(AB) \cap (CD)$: Résolvons pour cela le système $\begin{cases} 1+2t &=& -1+3t' \\ 2-2t &=& t' \\ 3-2t &=& t' \end{cases}$ (1) :

(1) $\iff \begin{cases} 2t - 3t' &=& -2 \\ 2t + t' &=& 2 \\ 2t + t' &=& 3 \end{cases}$ Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes :

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} & f(x) & = & x \\ \iff & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \iff & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \iff & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \iff & x^2 & = & 0 \\ \iff & x & = & 0 \end{array}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, i.e $\mathbb{R}$.
Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln \circ u = \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

De $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right.$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

De $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty \end{array}\right.$ on déduit, par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0\,;\,1]$. Par suite :

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

On a $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0 \\ \text{et} \\ f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \end{array}\right.$. Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$$

On a prouvé :

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \in [0,1]$$

4. a. L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2+1)$ est supérieur ou égal à N.

b.

Pour $A = 100$, l'algorithme affiche 110

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0,1]$.
• Puisque $u_0 = 1$, $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• Supposons vraie la propriété $\mathscr{P}_n$ pour *un* entier naturel n.
On a alors : $u_n \in [0,1]$.
D'après la troisième question de la partie A, on en déduit :

$$f(u_n) \in [0,1]$$

soit :

$$u_{n+1} \in [0,1]$$

On a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}_n \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

• On a prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0,1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right)$.
Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:
Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0, 1]$:

$$0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$$

soit :

$$u_n^2 \in [0, 1]$$

Par suite :

$$u_n^2 + 1 \in [1, 2]$$

La fonction ln est croissante sur $[1, +\infty[$:
De $u_n^2 + 1 \geqslant 1$, on déduit $\ln(u_n^2+1) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.
Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$, alors

La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.

4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit :

$$\ell = 0$$

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. On a

$$15x - 12y = 3(5x - 4y)$$

$5x$ et $4y$ sont deux entiers. La différence de deux entiers étant un entier, $5x - 4y$ est un entier, et $3(5x - 4y)$ est ainsi un multiple de 3 :

Si x et y sont deux entiers relatifs, alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3

b. Supposons qu'existe un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées (x_0, y_0) sont entières.
On a alors

$$y_0 = \frac{5}{4}x_0 - \frac{2}{3}$$

Soit :

$$15x_0 - 8 = 12y_0$$

Ou encore :

$$15x_0 - 12y_0 = 8$$

D'après la question précédente, $15x_0 - 12y_0$ est un multiple de 3.
Or $15x_0 - 12y_0$ est égal à 8. Comme 8 n'est pas un multiple de 3

Aucun point de la droite Δ_1 n'a ses coordonnées entières.

2. a. Puisque le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à Δ, on en déduit :

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

Soit :

$$nqy_0 = mqx_0 - pn$$

Ou encore :

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

Puisque x_0, y_0, m et n sont des entiers, alors $mx_0 - ny_0$ est un entier :

$$q(mx_0 - ny_0) \text{ est donc un multiple de } q$$

Puisque $np = q(mx_0 - ny_0)$, alors

$$q \text{ divise } np$$

b. D'après la question précédente, q divise np. Comme, par hypothèse, q et p sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que q divise n.

$$q \text{ divise } n$$

3. a. Puisque n et m sont premiers entre eux, alors, en vertu du théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que

$$nu + mv' = 1$$

Puisque $n = qr$, l'égalité précédente s'écrit :

$$qru - m(-v') = 1$$

soit, en posant $v = -v'$:

$$qru - mv = 1$$

Il existe deux entiers u et v tels que $qru - mv = 1$

b. L'égalité

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

est équivalente, d'après la question 2.a, à l'égalité

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

soit :

$$q(mx_0 - ny_0) = qrp$$

Puisque $q \neq 0$, cette dernière égalité est équivalente à l'égalité :

$$mx_0 - ny_0 = rp \quad (1)$$

D'après la question précédente, on sait qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$nu - mv = 1$$

Multiplions chacun des deux membres de cette égalité par rp. On obtient alors :

$$nurp - mvrp = rp$$

soit :

$$m(-vrp) - n(-urp) = rp \quad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2), on en déduit :

Le point de coordonnées $(-vrp, -urp)$ est un point de Δ

4. Les questions 2 et 3 permettent d'énoncer le résultat suivant :

> Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd(n, m) =pgcd$(p, q) = 1$.
> Alors il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers *si et seulement si* q divise n.

Dans le cas présent Δ est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$.

Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{pgcd}(3,8) = \text{pgcd}(7,4) = 1\\ \text{et}\\ 4 \text{ divise } 8\end{array}\right.$, alors

Il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers

5. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{M}{N}x - \frac{P}{Q}$.
On applique le résultat énoncé au début de la question précédente :

a. — Si Q ne divise pas N, alors l'algorithme affiche « pas de solution » : il se termine donc.
— Si Q divise N, on sait qu'il existe un point de Δ à coordonnées entières. Autrement dit, il existe un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que

$$y_0 = \frac{M}{N}x_0 - \frac{P}{Q}$$

Il est clair qu'un tel couple existe si et seulement si il existe un entier *relatif* x_0 tel que $\frac{M}{N}x_0 - \frac{P}{Q}$ est un entier.
Lorsque X parcourt $\mathbb{N}$ (i.e prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$), il existe donc un entier naturel X_0 tel que $\frac{M}{N}X_0 - \frac{P}{Q}$ ou $-\frac{M}{N}X_0 - \frac{P}{Q}$ est un entier *relatif* : l'algorithme se termine donc.

L'algorithme se termine

b. L'algorithme affiche les coordonnées du point de la droite d'équation $y = \frac{M}{N}x - \frac{P}{Q}$ dont l'abscisse a la plus petite valeur absolue.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Commun à tous les candidats

1.

$$\tan\alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \qquad \tan\beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et dérivables sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$. Puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit, par quotient, que la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$.
Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Puisque $\tan' > 0$ sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, alors

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

3. On a $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$, soit $\gamma = \beta - \alpha$. Par suite :

$$\tan\gamma = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{30,6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1+\dfrac{30,6}{x}\times\dfrac{25}{x}}$$

$$= \frac{\dfrac{5,6}{x}}{1+\dfrac{765}{x^2}} = \frac{\dfrac{5,6}{x}}{\dfrac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5,6}{x}\times\frac{x^2}{x^2+765}$$

$$= \frac{5,6x}{x^2+765}$$

$$\tan\gamma = \frac{5,6x}{x^2+765}$$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ l'est. Puisque γ appartient à l'intervalle $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ on en déduit, la fonction tangente étant strictement croissante sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, que γ est maximal si et seulement si $\tan\gamma$ est maximal.

S'il existe, le maximum de $\tan\gamma$ est ainsi le maximum, sur $]0,50]$, de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

Remarque :

> Pour démontrer que g admet, sur $]0\,;\,50]$, un maximum atteint pour une unique valeur de x, il suffit d'étudier les variations de g, ce qui ne pose aucun problème...

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Puisque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]0\,;\,50]$, on peut définir, sur $]0\,;\,50]$, la fonction $\dfrac{1}{g}$.

La fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,50]$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: les fonctions g et $\dfrac{1}{g}$ ont donc des sens de variation contraires.

Puisque $f = 5,6\times\dfrac{1}{g}$, les fonctions f et $\dfrac{1}{g}$ ont les mêmes variations : les fonctions f et g ont donc des variations contraires.

Le maximum de g[1] sur $]0\,;\,50]$ est obtenu en une valeur de x pour laquelle f admet un minimum.

La fonction f est dérivable sur $]0,50]$ et, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,50]$:

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2} = \frac{x+\sqrt{765}}{x}(x-\sqrt{765})$$

Puisque $x \in]0\,;\,50]$, alors $x+\sqrt{765} > 0$:

le signe de f'(x) est donc celui de $x-\sqrt{765}$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0,\sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765}\,;\,50]$:
f admet donc, sur $]0\,;\,50]$, un minimum atteint pour $x = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal pour une unique valeur de x, égale à $\sqrt{765}$ m.

Une valeur approchée de x, au mètre prés, est 28 m

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{ATB}$, à 0,01 radian près est $0,1$, soit environ $5,78°$.

1. Sous réserve d'existence