Corrigé du baccalauréat S – Asie
22 juin 2017

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $C(t)=\dfrac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$
où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $C(t)=12\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. La fonction C est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $C'(t)=12\left(0-\left(-\dfrac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)=\dfrac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}>0$ sur $[0\,;\,+\infty[$,
   donc la fonction C est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty}-\frac{7}{80}t=-\infty\\ \text{On pose } T=-\dfrac{7}{80}t\\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty}\mathrm{e}^{T}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}=0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}12\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)=12.$$
   Le plateau devrait être égal à 15 ; il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté.

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{105}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)$.
   La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et
   $$f'(x)=105\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x}\times\left(0-\left(-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)=\frac{105}{x^2}\left(-1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\frac{3x}{40}\mathrm{e}^{\frac{3}{40}}\right)=\frac{105\,g(x)}{x^2}$$
   où g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}-1$.

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 $\searrow$	-1

$f'(x) = \dfrac{105\,g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
D'après le tableau de variation de la fonction g, $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. D'après la question précédente la fonction f est continue car dérivable et strictement décroissante sur $[1\,;\,80]$ de
$f(1) = 105\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right) \approx 7{,}59$ à $f(80) = \dfrac{105}{80}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right) \approx 1{,}31$.
Comme $5{,}9 \in [1{,}31\,;\,7{,}59]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [1\,;\,80]$, tel que $f(\alpha) = 5{,}9$.
La calculatrice donne $f(8) \approx 5{,}92 > 5{,}9$ et $f(9) \approx 5{,}73 < 5{,}9$, donc $8 < \alpha < 9$;
$f(8{,}1) \approx 5{,}902 > 5{,}9$ et $f(8{,}2) \approx 5{,}882 < 5{,}9$, donc $8{,}1 < \alpha < 8{,}2$.
On a donc au dixième près $\alpha \approx 8{,}1$.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a. Puisque $C(t) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$, on a :
$C(6) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \dfrac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{70}a}\right) = f(a)$, d'après la question précédente.

b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
On a vu dans la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5{,}9$ admet une solution unique et que cette solution vaut environ 8,1.
On prendra donc 8,1 comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. On souhaite que $\dfrac{d}{a} = 15 \iff \dfrac{d}{8{,}1} = 15 \iff d = 15 \times 8{,}1 = 121{,}5$.
Le débit sera donc de 121,5 micromole par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{cases}$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

1. Il faut écrire en B3 la formule `=(A2+1)/(2*A2+4)*B2`
2. **a.** On peut raisonnablement conjecturer que $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

   b. On a pour tout entier naturel n :

   $v_{n+1} = (n+2)u_{n+1}$ et comme $u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n$, on peut écrire :

   $v_{n+1} = (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)u_n = (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2(n+2)}\right)u_n = \dfrac{n+1}{2}u_n = \dfrac{1}{2}\times(n+1)u_n = \dfrac{1}{2}v_n$.

   La relation $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, montre que la suite (v_n) est une suite gémétrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 \times u_0 = 1$.

   On a donc pour tout entier naturel n, $\quad v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$.
3. Pour tout entier naturel n, $\quad v_n = (n+1)u_n \iff u_n = \dfrac{v_n}{n+1}$.

   Or comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$, on a par produit de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 3 — **Commun à tous les candidats** — 4 points

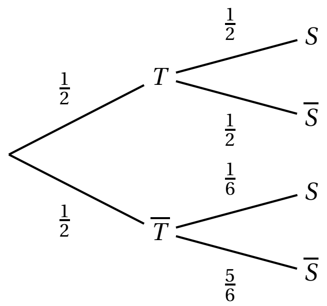
1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

   Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\dfrac{2}{3}$.

   Chaque dé a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être choisi ; pour le dé truqué le 6 apparait avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ au lieu de $\dfrac{1}{6}$ pour le dé normal.

   Soit : S l'évènement : « le 6 est sorti » ;
   T l'évènement : « le dé est truqué ».

   On a donc l'arbre de probabilités pondéré suivant :



   D'après la formule des probabilités totales, la probabilité d'apparition du 6 est donc :

$P(S) = P(T\cap S) + P(\overline{T}\cap S) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Or $P_S(T) = \dfrac{P(T\cap S)}{p(S)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4} \neq \dfrac{2}{3}$.

L'affirmation 1 est fausse.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_{\text{M}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\text{N}} = \dfrac{3-\text{i}}{2+\text{i}}$.

Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

- On a $z_{\text{M}} = 2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

  M a donc pour abscisse la partie réelle de z_{M}, soit $2\times\dfrac{1}{2} = 1$.
- On a $z_{\text{N}} = \dfrac{3-\text{i}}{2+\text{i}} = \dfrac{(3-\text{i})(2-\text{i})}{(2+\text{i})(2-\text{i})} = \dfrac{6-1-3\text{i}-2\text{i}}{4+1} = \dfrac{5-5\text{i}}{5} = 1-\text{i}$.

  N a donc pour abscisse la partie réelle de z_{N}, soit 1.

M et N ont la même abscisse : la droite (MN) est donc parallèle à l'axe des ordonnées.

L'affirmation 2 est vraie.

Dans les questions **3.** et **4.**, on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+t\\ y &=& 2,\\ z &=& 3+2t\end{array}\right. \quad t\in\mathbf{R}$.

3. On considère les points A, B et C avec A$(-2\,;\,2\,;\,3)$, B$(0\,;\,1\,;\,2)$ et C$(4\,;\,2\,;\,0)$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).

La droite d a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$.

$\overrightarrow{\text{AB}}\,(2\,;\,-1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(6\,;\,0\,;\,-3)$ ne sont pas colinéaires car A, B et C ne sont pas alignés.

On a $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 1\times 2 + 0\times(-1) + 2\times(-1) = 2-2 = 0$ et

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 1\times 6 + 0\times 0 + 2\times(-3) = 6-6 = 0$.

Un vecteur directeur de la droite d est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal à ce plan.

L'affirmation 3 est vraie.

4. On considère la droite Δ passant par le point D$(1\,;\,4\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,3)$.

Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

Deux droites sont coplanaires si elles sont soit parallèles, soit sécantes.

Les droites d et Δ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\,(1\,;\,0\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,1\,;\,3)$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux droites d et Δ ne sont pas parallèles.

On regarde maintenant si elles sont sécantes.

M$(x\,;\,y\,;\,z)$ étant un point quelconque de Δ on obtient une équation paramétrique de Δ en traduisant la colinéarité : $\overrightarrow{\text{DM}} = t'\vec{v}$ par : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+2t'\\ y &=& 4+t',\\ z &=& 1+3t'\end{array}\right. \quad t'\in\mathbf{R}$.

d et Δ sont sécantes si et seulement si le système $\left\{\begin{array}{l c l}1+t &=& 1+2t'\\ 2 &=& 4+t'\\ 3+2t &=& 1+3t'\end{array}\right.$ admet une solution unique.

$$\left\{\begin{array}{l c l}1+t &=& 1+2t'\\ 2 &=& 4+t'\\ 3+2t &=& 1+3t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}1+t &=& 1-4\\ -2 &=& t'\\ 3+2t &=& 1-6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}1+t &=& -3\\ -2 &=& t'\\ 3+2t &=& -5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}t &=& -4\\ -2 &=& t'\\ t &=& -4\end{array}\right.$$

Il existe donc un point commun à ces deux droites, correspondant à $t = -4$ pour la droite d, ou $t' = -2$ pour la droite Δ ; c'est le point de coordonnées $(1-4\,;\,2\,;\,3+2\times(-4)) = (-3\,;\,2\,;\,-5)$. Les droites ayant un point commun sont sécantes donc coplanaires
L'affirmation 4 est donc fausse.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1. On a $0 \leqslant x \leqslant 1 \implies 1 \leqslant 1+x \leqslant 2 \implies \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{1+x} > 0$ sur $[0\,;\,1]$.
L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ a pour valeur en unité d'aire, l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. $1+x > 0$ sur $[0\,;\,1]$; la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$; donc
$I = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln 2$.

Partie B : estimation de la valeur de J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. On complète l'algorithme proposé :

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    Si $y < \dfrac{1}{1+x^2}$ alors
	        c prend la valeur $c+1$
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur $\dfrac{c}{n}$

Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1\,000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est :
$\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}781 - \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;\, 0{,}781 + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}749\,;\,0{,}813]$.

3. L'amplitude de l'intervalle de confiance est égal à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Il faut donc résoudre l'inéquation $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}02$:

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}02 \iff \sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0{,}02} \iff \sqrt{n} \geqslant 100 \iff n \geqslant 10\,000.$

La valeur minimale de n est 10 000.

EXERCICE 5 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Question préliminaire
Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ a pour primitive sur $\mathbf{R}$ la fonction $-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc
$P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-\lambda a} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
L'événement $(T > a)$ est l'événement contraire de $(T \leqslant a)$ donc $P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right] = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Partie A : étude d'un exemple

1. La probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours est $P(T \geqslant 180) = \mathrm{e}^{-\frac{180}{2800}} \approx 0{,}938$.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours est $P_{(T \geqslant 180)}(T \geqslant 180 + 180)$.
   Comme la loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement :
   $$P_{(T \geqslant 180)}(T \geqslant 180 + 180) = P(T \geqslant 180) \approx 0{,}938.$$

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %. Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.
Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.
La probabilité qu'une lampe ne tombe pas en panne les 180 premiers jours de fonctionnement est $p = 0{,}94$.
On prend un échantillon de $n = 400$ lampes.
$n = 400 \geqslant 30$; $np = 376 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 24 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on puisse établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$I = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}94 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}94\times 0{,}06}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}94 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}94\times 0{,}06}}{\sqrt{400}}\right]$
$\approx [0{,}916\ ;\ 0{,}964]$

Sur 400 lampes, 32 sont tombées en panne pendant les 180 premiers jours d'utilisation donc 368 ne sont pas tombées en panne ; leur fréquence est $f = \dfrac{368}{400} = 0{,}92$.
Or $0{,}92 \in I$ donc il n'y a pas de raison de remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant.

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.
On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7{,}3$.

1. La probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an est $P(X > 445) \approx 0{,}247$ (à la calculatrice)
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.
   On cherche la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 %.
   On cherche le nombre n tel que $P(T \geqslant n) = 0{,}95$, ce qui équivaut à $P(X < n) = 0{,}05$; à la calculatrice, on trouve $n \approx 428$.
   Pour arriver à 500 lampes fonctionnelles, il faut donc un stock de $500 - 428 = 72$ lampes ; ainsi la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, est supérieure à 0,95.

EXERCICE 5 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

— elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;

— elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

— p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;

— q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

On définit les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$.

1. **a.** Si on trouve une matrice inverse à la matrice P, on prouve ainsi que la matrice P est inversible.

La calculatrice donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc la matrice P est inversible de matrice inverse P^{-1}.

Remarques

- On peut démontrer que la matrice P est inversible en utilisant son déterminant : le déterminant de la matrice P est $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$ donc la matrice P est inversible.
- On peut aussi chercher une matrice $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifier ensuite que $Q \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela prouve que P est inversible et a pour inverse Q.

b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & -2p+1 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & -2p+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + p - \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} - p + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - p + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} + p - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = A$

c. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation**

Pour $n = 1$, on sait que $A = PDP^{-1}$ donc la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

Soit n un réel quelconque supérieur ou égal à 1 tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire $A^n = PD^nP^{-1}$.

$A^{n+1} = A^n \times A = \left(PD^nP^{-1}\right) \times \left(PDP^{-1}\right) = PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = P\left(D^nD\right)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. On a vu successivement que $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, que $X_n = A^nX_0$, et que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Le logiciel de calcul formel donne $PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{(2p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(2p-1)^n+1}{2} \\ \dfrac{-(2p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que $q_n = \dfrac{-(2p-1)^n+1}{2}$.

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25.

On cherche donc n tel que $q_n \leqslant 0{,}25$ avec $p = 0{,}98$ donc $2p-1 = 0{,}96$. On résout l'inéquation :

$$q_n \leqslant 0{,}25 \iff \dfrac{-0{,}96^n+1}{2} \leqslant 0{,}25 \iff -0{,}96^n+1 \leqslant 0{,}5 \iff 0{,}5 \leqslant 0{,}96^n \iff \ln(0{,}5) \leqslant \ln\left(0{,}96^n\right)$$
$$\iff \ln(0{,}5) \leqslant n\ln(0{,}96) \iff \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}96)} \geqslant n$$

$\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$ donc on peut aligner au maximum 16 lignes de transmission pour que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

— c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2+b_3+b_4$ par 2 ;

— c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_3+b_4$ par 2 ;

— c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1+b_2+b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

a. c_1, c_2 et c_3 sont des restes dans une division par 2 donc ils ne peuvent être égaux qu'à 0 ou à 1.

b. Soit le mot 1001 ; on a donc $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=0$ et $b_4=1$.

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2+b_3+b_4=1$ par 2 donc $c_1=1$;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_3+b_4=2$ par 2 donc $c_2=0$;
- c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1+b_2+b_4=2$ par 2 donc $c_3=0$.

La clé de contrôle du mot 1001 est 100.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Si on change la valeur de b_1 en b_1', on aura $b_1' \equiv b_1+1 \pmod 2$.

- la valeur de c_1 ne dépend pas de b_1 donc est inchangée ;
- $b_1'+b_3+b_4 \equiv b_1+b_3+b_4+1 \pmod 2$ donc c_2 est modifiée ;
- $b_1'+b_2+b_4 \equiv b_1+b_2+b_4+1 \pmod 2$ donc c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
On complète le tableau ci-dessous :

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J	F	F	F	F	J	J	J
c_2	F	J	F	F	J	F	J	J
c_3	F	F	J	F	J	J	F	J

4. Les huit triplets du tableau $(J ; F ; F)$, $(F ; J ; F)$, ..., $(J ; J ; J)$, sont tous différents. Quand on reçoit un message, on calcule les codes de contrôle et on les compare avec ceux qu'on a reçus. Selon le triplet obtenu, on sait donc quel est le bit erroné, s'il y en a un.

5. Voici deux messages de 7 bits : $A = 0100010$ et $B = 1101001$.

   On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.

   - Pour le message $A = 0100010$:
     - $b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 0 = 1$ a pour reste 1 dans la division par 2.
     - $b_1 + b_3 + b_4 = 0 + 0 + 0 = 0$ a pour reste 0 dans la division par 2.
     - $b_1 + b_2 + b_4 = 0 + 1 + 0 = 1$ a pour reste 1 dans la division par 2.

     Donc le code correct est 101 alors que le code reçu est 010 ; la différence entre les deux codes correspond au triplet $(F ; F ; F)$.

     D'après le tableau, c'est donc b_4 qui est erroné et le bon message est 0101010.
   - Pour le message $B = 1101001$:
     - $b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ a pour reste 0 dans la division par 2.
     - $b_1 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ a pour reste 0 dans la division par 2.
     - $b_1 + b_2 + b_4 = 1 + 1 + 2 = 3$ a pour reste 1 dans la division par 2.

     Donc le code correct est 001 et est identique au code reçu ; le message B ne contient pas d'erreur.