Durée : 3 heures

Baccalauréat Terminale ES/L – Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

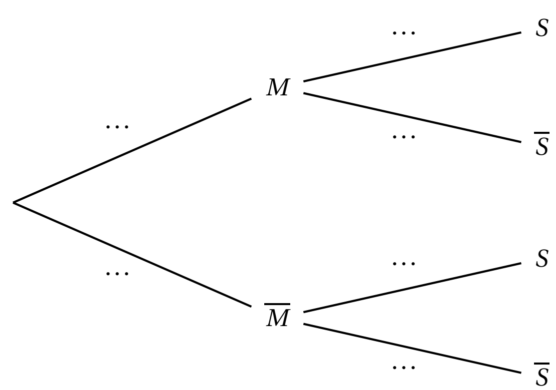
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

   a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

   b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   c. Montrer que : $P(S) = 0{,}021\,92$.

   d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   c. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :

   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;

- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

d. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. a. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.

b. Calculer u_2.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 20$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20	...		
Valeur de N	0	...		
Condition $U < 70$	vrai	...	vrai	faux

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. Préciser son premier terme v_0.

c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.

d. Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.

e. Déterminer la limite de la suite (v_n).

f. En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».
À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$.

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.

2. **a.** Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

b. Vérifier qu'au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

3. **a.** On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}25e_n + 0{,}45$.

4. **a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$:

```
E ⟵ 0,1
G ⟵ 0,9
Pour I allant de 1 à N
      E ⟵ ··· × E + ···
      G ⟵ ···
Fin Pour
Afficher E et G
```

b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.

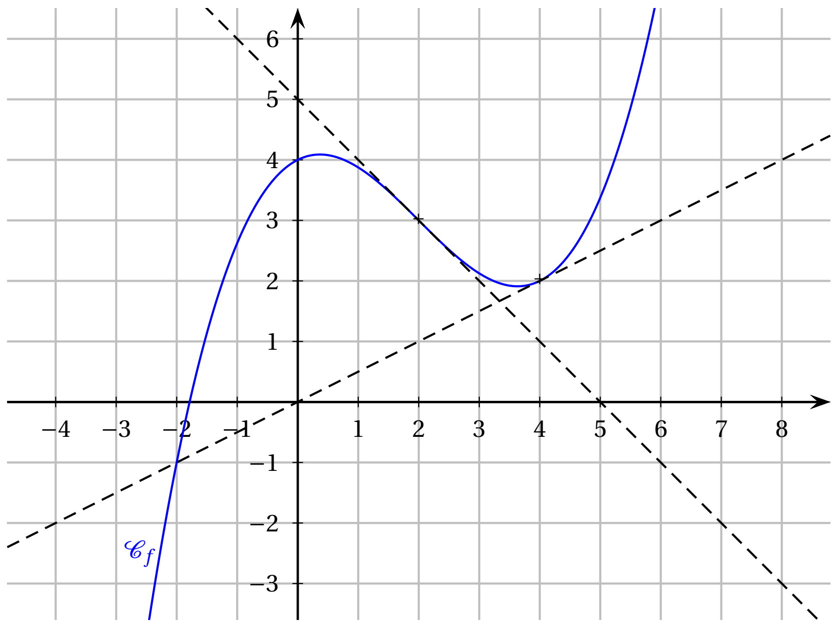
c. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez **sur votre copie** le numéro de la question et indiquerez la seule bonne réponse.*

Pour les questions **1.** et **2.** et **3.**, on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



1. $f'(4)$ est égal à :

A. 2	**B.** −1
C. 0,5	**D.** 0

2. f est convexe sur l'intervalle :

A. $]-\infty\,;\,2]$	**B.** $]-\infty\,;\,0{,}5]$
C. $[0\,;\,4]$	**D.** $[2\,;\,5]$

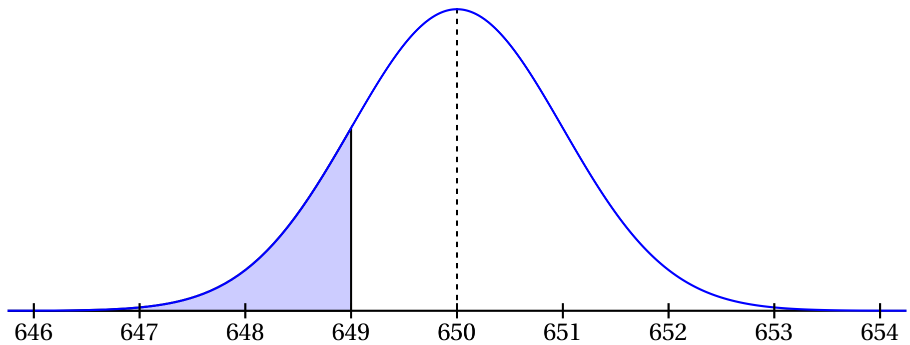
3. Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ est :

A. −0,1	**B.** 2,5
C. 2,9	**D.** 14,5

4. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que

$$P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587.$$

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



A. $P(X \leqslant 651) \approx 0{,}658\,7$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$.
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,25]$,

$$f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$

b. Résoudre dans $[1\,;\,25]$ l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$.

d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.