Baccalauréat S Asie 19 juin 2014

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A$(1~;~-1~;~-1)$, B$(1~;1~;1)$, C$(0~;3~;1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z+5=0$.

Question 1
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2~;~-1~;~1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&2+t\\ y&=&-1-t\\ z&=&1-t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&-1+2t\\ y&=&1-t\\ z&=&1+t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&5+4t\\ y&=&-3-2t\\ z&=&1+2t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&4-2t\\ y&=&-2+t\\ z&=&3-4t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&1+t\\ y&=&-3-t\\ z&=&2-2t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$.

a. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathcal{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
c. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point E$\left(\dfrac{1}{3}~;~-\dfrac{7}{3}~;~\dfrac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point F$\left(\dfrac{4}{3}~;~-\dfrac{1}{3}~;~\dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3
a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4
Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 ° **b.** 0,4 ° **c.** 67,8 ° **d.** 1,2 °

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu=45,5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. **a.** Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

   b. Déterminer $P(X \leqslant \mu)$.

2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.
On note α l'unique réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α.

On définit les évènements :

M « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S « l'individu a plus de 50 ans » ;

H « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. **a.** Déterminer $P(M \cap S)$.

   b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.

2. **a.** Calculer la probabilité $P(H)$.

   b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.

2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.

   Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

Exercice 3 — 5 points
Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x}-1-x=0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0~;~+\infty[$ la fonction f par $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{2x}-1-x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
Vérifier que $f'(0)=-2$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x)=4x\mathrm{e}^{2x}$.

3. Montrer que, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~x_0]$.

b. Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

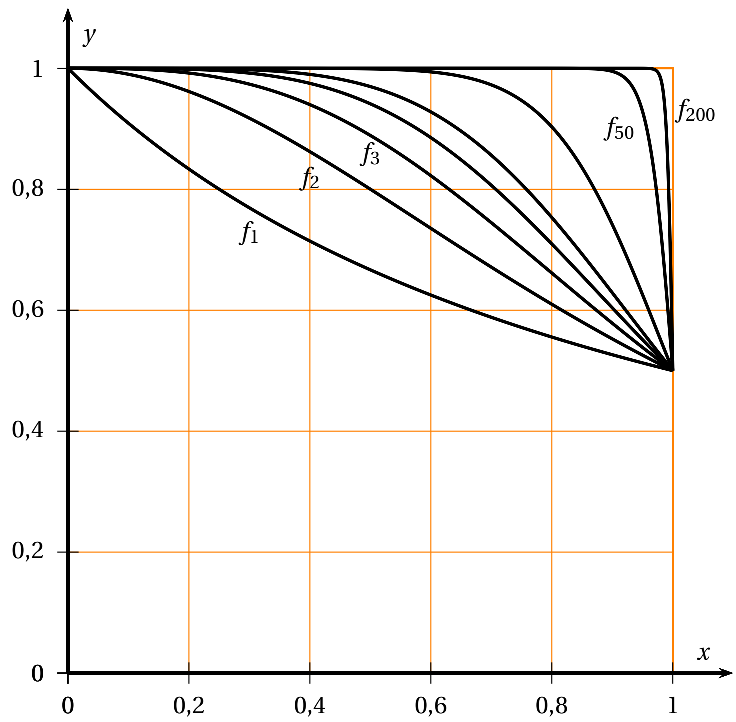
1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.
En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n}\leqslant 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.



4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$.
On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.

b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. **a.** Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo } M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ……
	Pour i allant de 1 à … faire
	u prend la valeur …
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M ……… »
	sinon afficher « M ……… »

   Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.