$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 15 novembre 2016 (3 heures)

Prénom : ………………………………………. **Nom :** ……………………………………….

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Il est demandé de ne rien écrire sur cet énoncé en dehors des réponses à donner (en particulier, on veillera à ne rien écrire sur les figures et le graphique).

• Une feuille annexe est jointe à l'énoncé pour la figure de l'exercice **IV** et le graphique de l'exercice **V**.

I. (5 points)

Cet exercice est un QCM composé de 5 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$ est égal à :

a. $]-\infty\,;-1] \cup]0\,;1]$ b. $]0\,;1]$ c. $[-1\,;0[\cup [1\,;+\infty[$

2°) Pour tout réel $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est égal à :

a. 1 b. 2 c. 3

3°) L'inégalité $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ est équivalente à :

a. $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ b. $1 \leqslant x \leqslant 9$ c. $1 \leqslant x \leqslant 9$ ou $-9 \leqslant x \leqslant -1$

4°) Le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ (m étant un réel fixé) sur $\mathbb{R}$ est égal à :

a. $-m$ b. $4 - m^2$ c. m

5°) Pour tout réel x différent de 1 et de – 1, le quotient $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ est égal à :

a. $\dfrac{2x+3}{x+1}$ b. $\dfrac{2x-3}{x+1}$ c. $\dfrac{2x-3}{x-1}$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	
Réponse						

II. (8 points : 1°) 1 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 2 points)

Dans tout l'exercice, on considère le polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$.

1°) Compléter la phrase :

Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont …… et …... (écrire uniquement les valeurs sans égalités)

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^4 + 3x^2 = 4 \quad (1)$; $\left| x^2 + 3x - 2 \right| = 2 \quad (2)$.

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 =$ ……………………………………………	$S_2 =$ ……………………………………………

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	

b) On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel les variables x et y sont des réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $|x| \leqslant 2$
  Alors y prend la valeur $x^2 + 3x - 4$
  Sinon
  y prend la valeur $3 - x$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le résultat affiché en sortie est positif ou nul.

…………………………..…………………………….

(écrire l'ensemble sans égalité, en utilisant les notations adéquates)

III. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point)

On considère un triangle OAB isocèle en O avec $OA = OB = 1$. On note M le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
On pose $AB = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 2$.
On pourra éventuellement admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

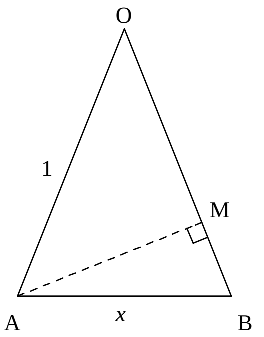


Figure 1

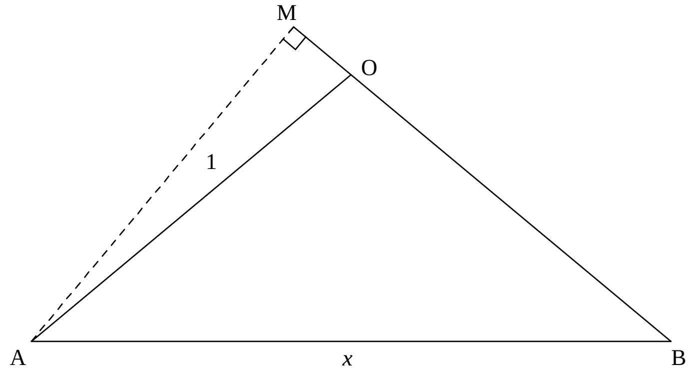


Figure 2

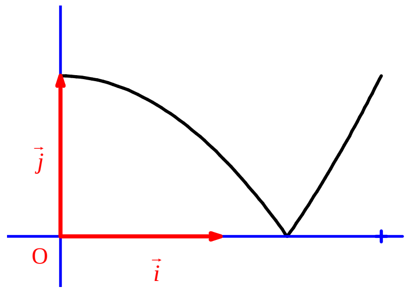
1°) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. On admet que dans ce cas, $M \in [OB]$ comme le montre la figure 1.

Démontrer que la distance $OM = \dfrac{2 - x^2}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OAM et ABM.

2°) On admet que pour $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$, $OM = \dfrac{x^2 - 2}{2}$ (dans ce cas, $M \notin [OB]$ comme le montre la figure 2).

On note f la fonction qui à tout réel $x \in [0\,;2]$ associe la longueur OM.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



Soit m un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1]$.

- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ (E).
- Déterminer par le calcul les solutions de (E). On donnera uniquement les expressions en fonction de m après recherche au brouillon.

3°) Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) on a : $OM = \dfrac{AB}{4}$.

4°) Proposer sans justifier une expression de $f(x)$ utilisant la valeur absolue.

IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCD un parallélogramme. Soit a un réel fixé.
On note E et F les points définis par $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB}$. Soit I le milieu de $[CF]$.

Compléter, en la codant, la figure donnée sur la feuille annexe pour $a = \dfrac{4}{3}$ (valeur uniquement pour la figure).

Pour les question 2°) et 3°), on démarrera sèchement les calculs vectoriels en les présentant en colonnes.
On donnera éventuellement quelques précisions entre parenthèses à droite de chaque égalité.

1°) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$ (et de a).
2°) Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$ (et de a).
3°) Démontrer que les droites (DE) et (BI) sont parallèles. On attend une rédaction précise.

V. (12 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 1 point ; 6°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A, B, C sont trois points tels que :

- (AB) a pour équation cartésienne $3x + 2y - 11 = 0$;
- (AC) passe par le point $I(-5\,;2)$ et admet le vecteur $\vec{u}(3\,;1)$ pour vecteur directeur ;
- (BC) est parallèle à (OA) ;
- B a pour ordonnée 1.

1°) Déterminer une équation cartésienne de (AC) ; en déduire les coordonnées de A.
On attend la rédaction habituelle pour les équations cartésiennes de droites que l'on rappelle ci-dessous (modèle à recopier et compléter, ne rien écrire dans le cadre) :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si .... $= 0$

si et seulement si .... $= 0$

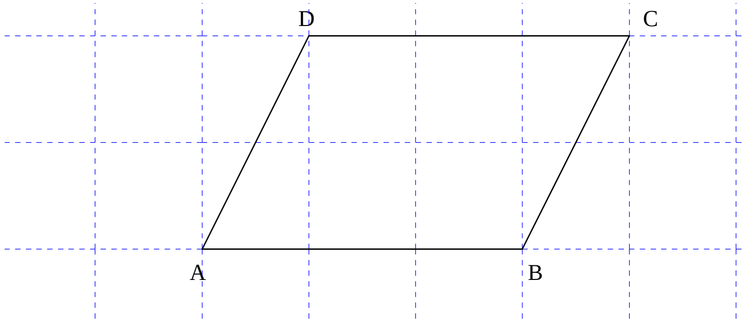
2°) Déterminer les coordonnées de B. On attend une rédaction courte et efficace.
3°) Déterminer les coordonnées de C.
4°) Démontrer que OACB est un parallélogramme. On attend une démonstration simple.
5°) Déterminer l'abscisse du point d'intersection E de (AB) et de l'axe des abscisses.

6°) Le but de cette question est de déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ du plan.

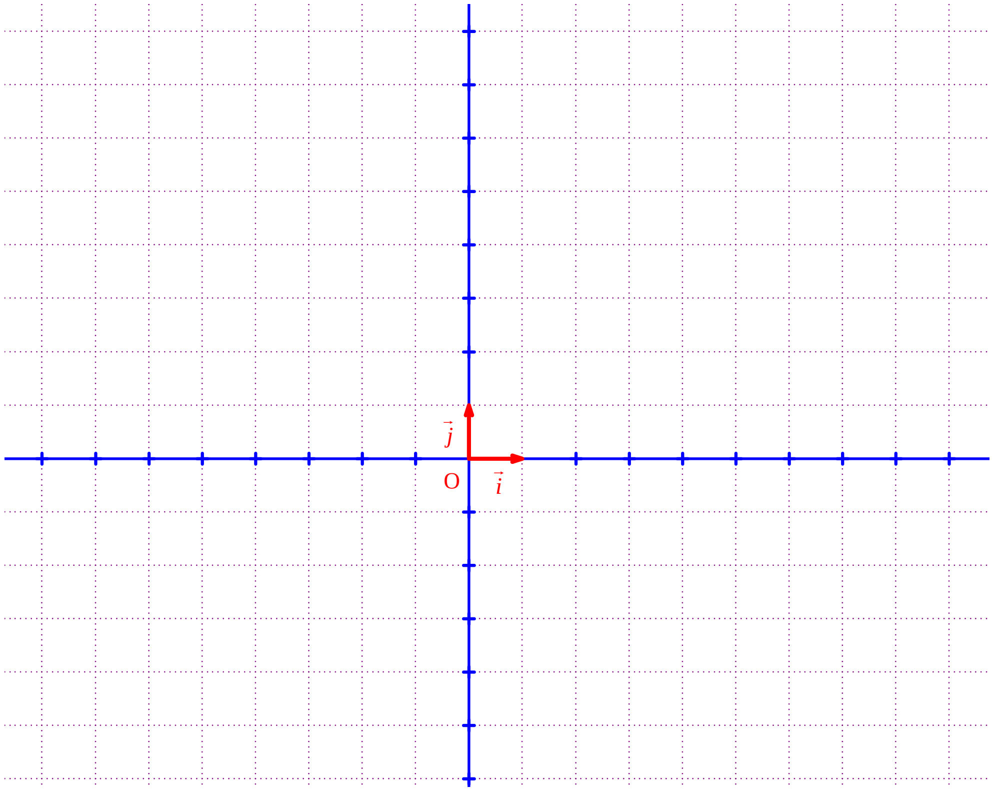
- À l'aide des coordonnées, exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
- Utiliser l'égalité obtenue pour déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Prénom : ……………………………………………. **Nom :** …………………………………………….

Figure exercice IV :



Graphique exercice V :



Prénom : ………………………………………. **Nom :** ……………………………………….

I (5)	II (8)	III (8)	IV (7)	V (12)	Total/40	Total/20

III. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point)

1°)

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

2°)

- …………………. (une seule réponse sans égalités)

- ……………………………………………………………………….. (expressions en fonction de *m*, sans égalités)

3°) ……………………………………………….…. (donner les valeurs sans égalités, séparées par une virgule)

4°) ………………………………………………. (une seule égalité)

IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

V. (12 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 1 point ; 6°) 2 points)

1°) ……

2°) ……

3°) ……

4°) ……

5°) ……

6°) ……

Corrigé du contrôle du 15-11-2016

I.

Cet exercice est un QCM composé de 5 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$ est égal à :

a. $]-\infty\,;-1]\cup]0\,;1]$ b. $]0\,;1]$ c. $[-1\,;0[\cup[1\,;+\infty[$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

On résout l'inéquation $\dfrac{1-x^2}{x} \geqslant 0$ grâce à un tableau de signes (signe de $1-x^2$ et signe de x ; on a les valeurs 1, – 1 et 0 ; la valeur 0 est valeur interdite).

2°) Pour tout réel $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est égal à :

a. 1 b. 2 c. 3

L'équation $x^3 - ax = 0$ est successivement équivalente à :

$x(x^2-a)=0$

$x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$

$x=0$ ou $x-\sqrt{a}=0$ ou $x+\sqrt{a}=0$

$x=0$ ou $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Les solutions de l'équation sont 0, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

3°) L'inégalité $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ est équivalente à :

a. $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ b. $1 \leqslant x \leqslant 9$ c. $1 \leqslant x \leqslant 9$ ou $-9 \leqslant x \leqslant -1$

4°) Le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ (m étant un réel fixé) sur $\mathbb{R}$ est égal à :

a. $-m$ b. $4-m^2$ c. m

La fonction $f : x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ est une fonction polynôme du second degré car son expression est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=2m$ et $c=4$. On note que $a \neq 0$.

Comme $a > 0$, f admet un minium global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2m}{2} = -m$.

Ce minimum est égal à $f(-m) = (-m)^2 + 2m\times(-m) + 4 = m^2 - 2m^2 + 4 = 4 - m^2$.

5°) Pour tout réel x différent de 1 et de – 1, le quotient $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}$ est égal à :

a. $\dfrac{2x+3}{x+1}$ b. $\dfrac{2x-3}{x+1}$ c. $\dfrac{2x-3}{x-1}$

On doit commencer par factoriser le polynôme $2x^2+x-3$.

Les racines de ce polynôme sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{3}{2}$ (obtenue par produit).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\;\; 2x^2+x-3 = 2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(x+3)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \quad \frac{2x^2+x-3}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{2x+3}{x+1}$$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	
Réponse	a	c	b	b	a	

II.

Dans tout l'exercice, on considère le polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$.

1°) Compléter la phrase :

Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont – 4 et 1 (écrire uniquement les valeurs sans égalités)

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^4+3x^2=4 \quad (1)$; $\left|x^2+3x-2\right|=2 \quad (2)$.

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1=\{1\,;-1\}$	$S_2=\{0\,;1\,;-3\,;-4\}$

Résolution de (1) :

On pose $X=x^2$ (changement d'inconnue).
L'équation (1) s'écrit : $X^2+3X=4$ qui est équivalente à $X^2+3X-4=0$.

Les racines du polynôme X^2+3X-4 sont -4 et 1.

Or $X=x^2$.

Donc l'équation (1) est successivement équivalente à :

$\underbrace{x^2=-4}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}}$ ou $x^2=1$

$x=1$ ou $x=-1$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_1=\{1\,;-1\}$.

Résolution de (2) :

L'équation (2) est successivement équivalente à :

$x^2+3x-2=2$ ou $x^2+3x-2=-2$
$x^2+3x-4=0$ ou $x^2+3x=0$
$x^2+3x-4=0$ ou $x(x+3)=0$
$x=1$ ou $x=-4$ ou $x=0$ ou $x=-3$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_2=\{0\,;1\,;-3\,;-4\}$.

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel les variables x et y sont des réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $|x|\leqslant 2$
Alors y prend la valeur x^2+3x-4
Sinon
y prend la valeur $3-x$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le résultat affiché en sortie est positif ou nul.

…………………………..……………………………

(écrire l'ensemble sans égalité, en utilisant les notations adéquates)

La condition $|x|\leqslant 2$ équivaut à $-2\leqslant x\leqslant 2$.

La condition $|x|>2$ équivaut à $x<-2$ ou $x>2$.

On résout donc les systèmes $(\text{I})\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x^2+3x-4\geqslant 0\end{cases}$ et $(\text{II})\begin{cases}x<-2 \text{ ou } x>2\\ 3-x\geqslant 0\end{cases}$

(I) est successivement équivalent à :

$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant -4 \text{ ou } x\geqslant 1\end{cases}$

$1\leqslant x\leqslant 2$

(II) est successivement équivalent à :

$\begin{cases}x<-2 \text{ ou } x>2\\ x\leqslant 3\end{cases}$

$x<-2$ ou $2\leqslant x\leqslant 3$

Les réels x cherchés sont les réels vérifiant $x<-2$ ou $1\leqslant x\leqslant 3$.

III.

On considère un triangle OAB isocèle en O avec $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$. On note M le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
On pose $\mathrm{AB}=x$ avec $0\leqslant x\leqslant 2$.
On pourra éventuellement admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

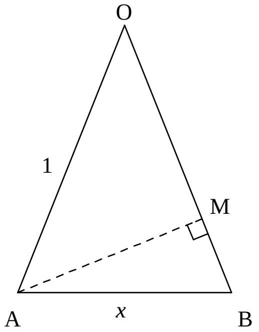


Figure 1

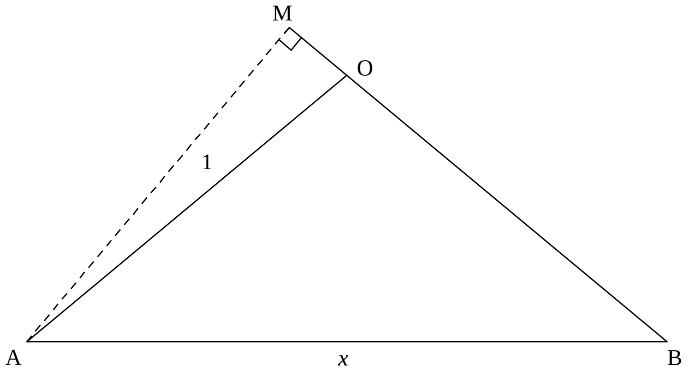


Figure 2

1°) Dans cette question, on suppose que $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$. On admet que dans ce cas, $\mathrm{M}\in[\mathrm{OB}]$ comme le montre la figure 1.

Démontrer que la distance $\mathrm{OM}=\dfrac{2-x^2}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OAM et ABM.

Cette question a été très mal réussie par l'ensemble des élèves. Il y en a très peu qui l'ont réussie.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAM, on a :
$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2$ ce qui permet d'écrire $\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=1$ (1) (puisque $\mathrm{OA}=1$ par hypothèse).

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABM, on a :
$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{MB}^2$ ce qui permet d'écrire $\mathrm{AM}^2=x^2-\mathrm{BM}^2$ (2) (puisque $\mathrm{AB}=x$ par hypothèse).

Compte tenu de (2), (1) donne alors $\mathrm{OM}^2+x^2-\mathrm{BM}^2=1$ (3).

Or $\mathrm{M}\in[\mathrm{OB}]$, donc $\mathrm{BM}=\mathrm{OB}-\mathrm{OM}$ soit $\mathrm{BM}=1-\mathrm{OM}$.

(3) donne alors $\mathrm{OM}^2+x^2-(1-\mathrm{OM})^2=1$.

Cette dernière égalité donne ensuite successivement :

$\mathrm{OM}^2+x^2-\left(1+\mathrm{OM}^2-2\mathrm{OM}\right)=1$

$x^2-1+2\times\mathrm{OM}=1$

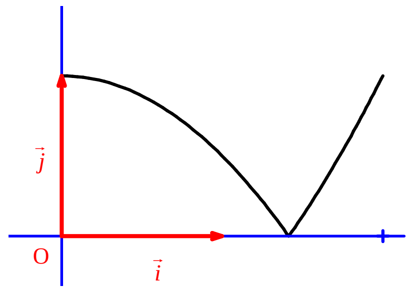
$2\times\mathrm{OM}=2-x^2$

On en déduit que $\mathrm{OM}=\dfrac{2-x^2}{2}$.

2°) On admet que pour $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2$, $\mathrm{OM}=\dfrac{x^2-2}{2}$ (dans ce cas, $\mathrm{M}\notin[\mathrm{OB}]$ comme le montre la figure 2).

On note f la fonction qui à tout réel $x\in[0\,;2]$ associe la longueur OM.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



Soit m un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1]$.

• Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ (E).

$m\in]0\,;1]$
On cherche le nombre de points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y=m$.
On observe qu'il y a deux points d'intersection.
L'équation (E) admet donc deux solutions dans l'intervalle $[0\,;2]$.

• Déterminer par le calcul les solutions de (E). On donnera uniquement les expressions en fonction de m après recherche au brouillon.

L'équation (E) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases}\dfrac{2-x^2}{2}=m\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\dfrac{x^2-2}{2}=m\\ \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2=2-2m\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x^2=2+2m\\ \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$\begin{cases} x=\sqrt{2-2m} \text{ ou } x=-\sqrt{2-2m} \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=\sqrt{2m+2} \text{ ou } x=-\sqrt{2m+2} \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

$x=\sqrt{2-2m}$ ou $x=\sqrt{2m+2}$

Il faut justifier pourquoi on ne retient que ces deux expressions.

On exclut $-\sqrt{2-2m}$ et $-\sqrt{2m+2}$ qui donnent un résultat négatif.

Comme $m \in]0\,;1]$, $0 \leqslant 2-2m < 2$ d'où $0 \leqslant \sqrt{2-2m} < \sqrt{2}$.

Comme $m \in]0\,;1]$, $2 < 2+2m \leqslant 4$ d'où $\sqrt{2} < \sqrt{2+2m} \leqslant 2$.

3°) Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) on a : $\text{OM}=\dfrac{\text{AB}}{4}$.

L'égalité $\text{OM}=\dfrac{\text{AB}}{4}$ est équivalente à $\begin{cases} \dfrac{2-x^2}{2}=\dfrac{x}{4} \quad (1) \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{2}=\dfrac{x}{4} \quad (2) \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$.

(1) est successivement équivalente à :

$2\left(2-x^2\right)=x$

$4-2x^2=x$

$2x^2+x-4=0 \quad (\Delta_1=33)$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ ou $x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}$

(2) est successivement équivalente à :

$2\left(x^2-2\right)=x$

$2x^2-4=x$

$2x^2-x-4=0 \quad (\Delta_2=33)$

$x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$

Avec la calculatrice, on vérifie que :

$\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \in \left[0\,;\sqrt{2}\right]$; $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4} \notin \left[0\,;\sqrt{2}\right]$; $\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \in \left[\sqrt{2}\,;2\right]$; $\dfrac{1-\sqrt{33}}{4} \notin \left[\sqrt{2}\,;2\right]$.

Donc les valeurs de x qui répondent au problème sont $\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{33}+1}{4}$.

4°) Proposer sans justifier une expression de $f(x)$ utilisant la valeur absolue.

$$f(x)=\frac{\left|x^2-2\right|}{2}$$

IV.

Soit ABCD un parallélogramme. Soit a un réel fixé.
On note E et F les points définis par $\overrightarrow{\text{BE}}=a\overrightarrow{\text{BA}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}}=a\overrightarrow{\text{AB}}$. Soit I le milieu de $[\text{CF}]$.

Compléter en la codant la figure donnée sur la feuille annexe pour $a=\dfrac{4}{3}$ (valeur uniquement pour la figure).

Pour les question 2°) et 3°), on démarrera sèchement les calculs vectoriels en les présentant en colonnes.
On donnera éventuellement quelques précisions entre parenthèses à droite de chaque égalité.

On doit impérativement coder la figure pour marquer que I est le milieu de $[\text{CF}]$.

Du coup, on doit aussi tracer le segment $[\text{CF}]$ (ce que certains élèves ont oublié de faire).

1°) Exprimer $\overrightarrow{\text{ED}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et de $\overrightarrow{\text{AD}}$ (et de a).

On attend une égalité de la forme $\overrightarrow{\text{ED}}=\ldots\overrightarrow{\text{AB}}+\ldots\overrightarrow{\text{AD}}$.
On doit exprimer $\overrightarrow{\text{ED}}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et de $\overrightarrow{\text{AD}}$ (et vraiment ces vecteurs-là, et non $\overrightarrow{\text{BA}}$ ou $\overrightarrow{\text{DA}}$).

$\overrightarrow{\text{ED}}=\overrightarrow{\text{EB}}+\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AD}}$ (relation de Chasles)

$=a\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AD}}$

$=(a-1)\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AD}}$

2°) Exprimer $\overrightarrow{\text{BI}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et de $\overrightarrow{\text{AD}}$ (et de a).

$\overrightarrow{\text{BI}}=\overrightarrow{\text{BF}}+\overrightarrow{\text{FI}}$ (relation de Chasles)

$=\overrightarrow{\text{BF}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{FC}}$ (car I est le milieu de $[\text{CF}]$).

$=\overrightarrow{\text{BF}}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{BC}}-\overrightarrow{\text{BF}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BF}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AF}}-\overrightarrow{\text{AB}}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$ (car comme ABCD est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{\text{AD}}=\overrightarrow{\text{BC}}$)

$=\dfrac{1}{2}\left(a\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{AB}}\right)+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$

$=\dfrac{a-1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$

3°) Démontrer que les droites (DE) et (BI) sont parallèles. On attend une rédaction précise.

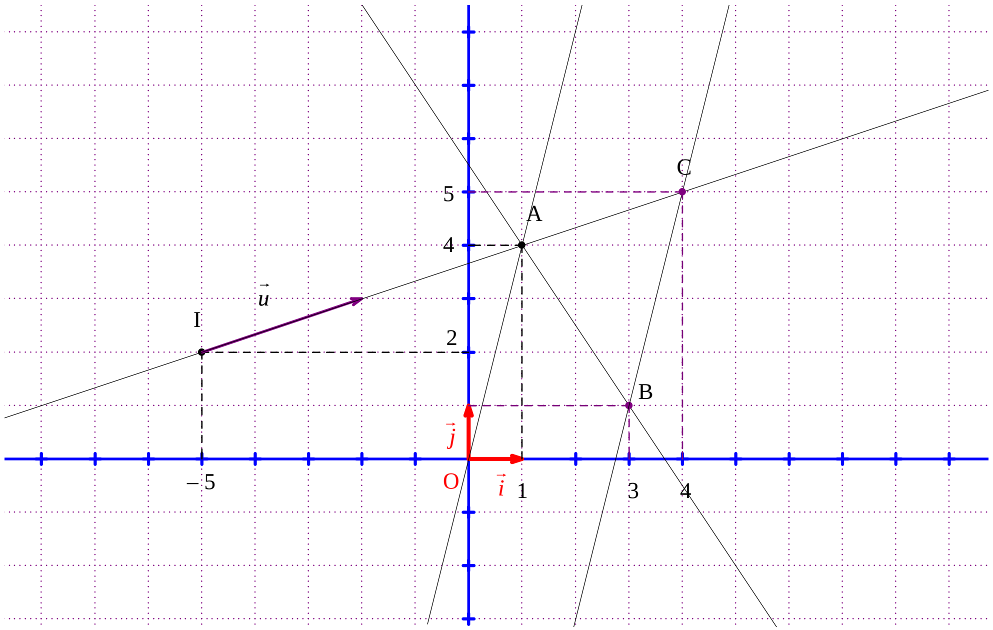
On observe que $\overrightarrow{\text{BI}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{ED}}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BI}}$ et $\overrightarrow{\text{ED}}$ sont colinéaires.

On en déduit que $(DE)//(BI)$.

V.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A, B, C sont trois points tels que :

- (AB) a pour équation cartésienne $3x+2y-11=0$;
- (AC) passe par le point $I(-5;2)$ et admet le vecteur $\vec{u}(3;1)$ pour vecteur directeur ;
- (BC) est parallèle à (OA) ;
- B a pour ordonnée 1.



On commence tout de suite par faire un graphique (il n'y a pas besoin d'avoir déterminé les coordonnées des points A, B, C pour le faire).

Pour tracer la droite d'équation cartésienne $3x+2y-11=0$, on cherche deux points à cordonnées entières de cette droite. Par exemple, les points de coordonnées $(5;-2)$ et $(-3;5)$ appartiennent à cette droite.

On trace très facilement la droite (AC) grâce au point I et au vecteur $\vec{u}$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de (AC) ; en déduire les coordonnées de A.
On attend la rédaction habituelle pour les équations cartésiennes de droites que l'on rappelle ci-dessous (modèle à recopier et compléter, ne rien écrire dans le cadre) :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x;y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si .... $= 0$

si et seulement si .... $= 0$

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x;y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\begin{vmatrix} x+5 \\ y-2 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x+5 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $x+5-3y+6=0$

si et seulement si $x-3y+11=0$

Les coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x-3y+11=0 \\ 3x+2y-11=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \times(-3) \\ \times 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 11x-11=0 \\ 11y-44=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Donc A a pour coordonnées $(1;4)$.

On vérifie ce résultat graphiquement.

2°) Déterminer les coordonnées de B. On attend une rédaction courte et efficace.

On a : $3x_B+2\times y_B-11=0$ soit $3x_B+2\times 1-11=0$ d'où $x_B=3$.

Donc B a pour coordonnées $(3;1)$.

3°) Déterminer les coordonnées de C.

On cherche une équation cartésienne de la droite (BC), droite parallèle à (OA) passant par B.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$M \in (BC)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\left|\begin{matrix} x-3 \\ y-1 \end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y-1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $4(x-3)-(y-1)=0$

si et seulement si $4x-y-11=0$

Les coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x-3y+11=0 \\ 4x-y-11=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times(-1) \\ \times 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times(-4) \\ \times 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 11x-44=0 \\ 11y-55=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

Donc C a pour coordonnées $(4\,;5)$.

4°) Démontrer que OACB est un parallélogramme. On attend une démonstration simple.

$\overrightarrow{OA}\left|\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}\right.$

On constate que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

Par suite, OACB est un parallélogramme.

On peut aussi utiliser les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5°) Déterminer l'abscisse du point d'intersection E de (AB) et de l'axe des abscisses.

On a : $3x_E + 2y_E - 11 = 0$.

Or $y_E = 0$. Par suite, $3x_E + 2\times 0 - 11 = 0$. Donc $x_E = \dfrac{11}{3}$.

On vérifie ce résultat sur le graphique.

6°) Le but de cette question est de déterminer les coordonnées de I dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ du plan.

- À l'aide des coordonnées, exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
- Utiliser l'égalité obtenue pour déterminer les coordonnées de I dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

$\overrightarrow{AI}\left|\begin{matrix} -5-1=-6 \\ 1-4=-3 \end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} 4-1=3 \\ 5-4=1 \end{matrix}\right.$

Donc $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AC}$.

Comme on a démontré que OACB est un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{OB}$.
Cette dernière égalité donne $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OB}$ d'où $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$.

Cette égalité permet d'affirmer que I a pour coordonnées $(1\,;-2)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

On vérifie aisément ce résultat graphiquement.