Corrigé du devoir commun de Mathématiques du deuxième trimestre ; 2013 - 2014
Premières S
Durée 2 heures. Calculatrice autorisée.

- *Toute réponse doit être justifiée.*
- *La rédaction et la présentation du devoir seront prises en compte.*
- ***Le sujet complet doit être rendu avec la copie.***

EXERCICE 1 : Probabilités (7 points).

Partie A : **Propriété de l'espérance. Démonstration de cours.**

1. Soit X une variable aléatoire dont la loi est décrite par le tableau suivant :

Valeurs possibles de X, x_i	x_1	…	…	x_n	Total des p_i
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	…	...	p_n	1

a) Donner l'expression de son espérance mathématique E(X) .

Par définition $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

b) Montrer, en détaillant les calculs, que, quelque soient *a* et *b*, réels donnés : $E(aX+b) = aE(X)+b$.

$aX+b$ **est une variable aléatoire dont la loi est décrite par le tableau suivant :**

Valeurs possibles de $aX+b$	ax_1+b	…	…	ax_n+b
p_i	p_1	…	...	p_n

Donc $E(aX+b) = p_1(ax_1+b) + p_2(ax_2+b) + \ldots + p_n(ax_n+b)$ **.**

On développe et on rassemble les termes contenant *a* et ceux contenant *b*, cela donne :
$E(aX+b) = a(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ **.**

Or $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots\ldots + p_n x_n = E(X)$ **et** $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ **donc** $E(aX+b) = aE(X)+b$

2. Application

Le nombre de repas servis par une cantine scolaire un jour donné est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 500.

La cantine dépense 2 euros par repas servi plus les coûts fixes journaliers qui s'élèvent à 1000 euros.

Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour la cantine, exprimée en euros.

Donner l'expression de Y en fonction de X et calculer E(Y) en utilisant la formule démontrée dans la question 1.b.

D'après l'énoncé : $Y = 2X + 1000$ **donc** $E(Y) = E(2X+1000) = 2E(X) + 1000 = 2 \times 500 + 1000 = 2000$

Sur un grand nombre de jours, la cantine peut espérer dépenser en moyenne 2000 euros par jour.

Partie B : Un jeu

Un club sportif organise un jeu pour financer ses activités.

Pour participer, un joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 euros puis prélever au hasard une boule dans un sac.

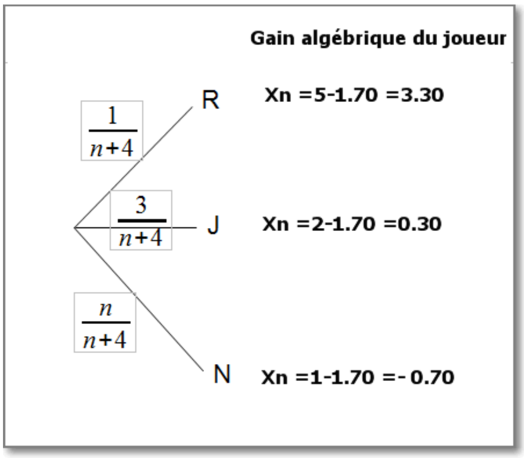
Ce sac contient des boules indiscernables au toucher : une boule rouge, trois boules jaunes et ***n*** boules noires (avec ***n*** entier strictement positif).

Si la boule prélevée est rouge le joueur reçoit 5 euros, si la boule est jaune il reçoit 2 euros et si la boule est noire, il reçoit 1 euro.

On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur(ne pas oublier la mise)

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

Faisons un arbre pour illustrer l'énoncé :



Loi de probabilité de X_n

Valeurs possibles de X_n	–0,70	0,3	3,30
$p_i = P(X_n = x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n .

$$E(X_n) = \frac{-0{,}7 \times n}{n+4} + \frac{0{,}3 \times 3}{n+4} + \frac{3{,}30 \times 1}{n+4} = \frac{-0{,}7n + 4{,}2}{n+4}$$

3. a. Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n) = 0{,}5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce n'est pas intéressant pour le club puisque cela signifie qu'il va perdre en moyenne 0,5 € par partie jouée (pour un grand nombre de parties, chaque joueur pouvant espérer gagner 0,5 € par partie)

b.Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n) = 0$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce n'est pas intéressant non plus puisque, le jeu étant équitable, le club ne perdra , ni ne gagnera sur un grand nombre de parties.

c. Supposons que ***n*** soit tel que $E(X_n) = -0{,}5$. Est-ce intéressant pour le club organisateur ? Justifier

Ce cas est intéressant pour le club puisque cela signifie qu'il va gagner en moyenne 0,5 € par partie jouée (pour un grand nombre de parties, chaque joueur pouvant espérer perdre 0,5 € par partie)

4. Le club souhaite gagner au moins 0,50 euros par partie. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

L'espérance de gain d'un joueur doit être inférieure ou égale à – 0,5 , on doit donc résoudre l'inéquation suivante : $\frac{-0{,}7n + 4{,}2}{n+4} \leqslant -0{,}5$ **.**

Cette inéquation est équivalente à $-0{,}7n + 4{,}2 \leqslant -0{,}5(n+4)$ **(multiplication par** $n+4$ **strictement positif) d'où** $6{,}2 \leqslant 0{,}2n$ **c'est à dire** $n \geqslant 31$ **.**

Il faut au moins 31 boules noires pour que le club espère gagner au moins 0,5 € par partie

EXERCICE 2 : Trigonométrie : les parties A,B,Cet D sont indépendantes (7 points).

Partie A Préciser pour chaque affirmation si elle est **vraie ou fausse**. On justifiera soigneusement :

1. On considère un angle α qui mesure 144°, alors une mesure en radians de α est $\frac{4\pi}{3}$ rad.

On utilise la proportionnalité suivante :

Angle en degrés	180	144
Angle en radians	π	$\alpha = \frac{144 \times \pi}{180} = \frac{4\pi}{5}$

La mesure principale de l'angle α exprimée en radians est donc $\frac{4\pi}{5}$ **or la mesure principale de** $\frac{4\pi}{3}$ **est** $\frac{-2\pi}{3}$ **donc l'affirmation 1 est fausse.**

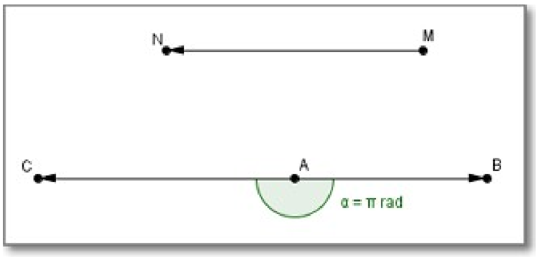
2. Soit l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ dont une mesure est $\frac{49\pi}{4}$ rad . La mesure principale de cet angle est $\frac{\pi}{4}$ rad.

$\frac{49\pi}{4}=\frac{48\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=12\pi+\frac{\pi}{4}=6\times 2\pi+\frac{\pi}{4}$ **. L'affirmation 2 est vraie**

3. A, B, M et N sont 4 points distincts du plan. Si $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AB})=3\pi$ rad alors les 4 points A, B, M et N sont alignés.

Si $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AB})=3\pi=2\pi+\pi$ **radians la mesure principale de l'angle** $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AB})$ **est** π

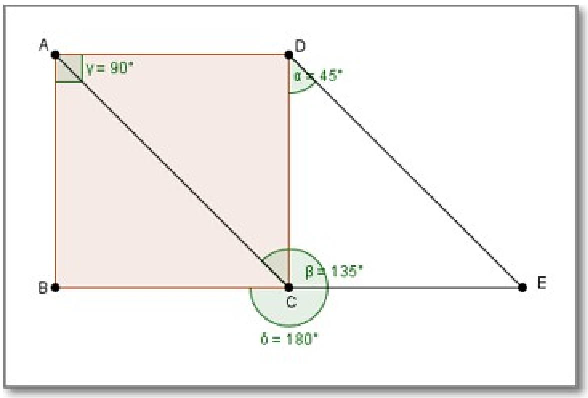
L' affirmation 3 est fausse comme le montre le contre-exemple ci-contre :
Sur cette figure $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\pi$ **et pourtant les points A, B, M et N ne sont pas alignés.**



Partie B

On considère la figure ci-contre : ABCD est un carré et DCE est un triangle rectangle isocèle en C avec $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})=+\frac{\pi}{2}$

Déterminer les mesures des angles orientés suivants : Expliquer si nécessaire.



Méthode : Lorsque les deux vecteurs formant l'angle orienté n'ont pas la même origine, remplacer un des vecteurs (ou les deux) par un vecteur qui lui est égal.

$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})=+\frac{\pi}{4}$ **car** DCE est un triangle rectangle isocèle en C.

$(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})$ **car** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CE}$
(BC = CD = CE et B, C, E alignés)

$(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ **donc** $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})=\frac{3\pi}{4}$

$(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{DA})=(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB})=\pi$

Partie C

1. Résoudre dans IR l'équation $\cos(3x)=\frac{-1}{2}$

$\cos(3x)=\frac{-1}{2}=\cos(\frac{2\pi}{3})$

L'équation est donc équivalente à $\left\{\begin{array}{c} 3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ 3x=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ **c'est à dire** $\left\{\begin{array}{c} x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\frac{-2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

2. Lister les solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

pour les solutions de la forme $\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ **,** $k=0$ **donne** $\frac{2\pi}{9}$ **,** $k=1$ **donne** $\frac{8\pi}{9}$ **;** $k=-1$ **donne** $\frac{-4\pi}{9}$ **;**
pour les solutions de la forme $\frac{-2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$**,** $k=0$ **donne** $\frac{-2\pi}{9}$**,** $k=1$ **donne** $\frac{4\pi}{9}$ **;** $k=-1$ **donne** $\frac{-8\pi}{9}$
donc $S=\left\{\frac{-8\pi}{9};\frac{-4\pi}{9};\frac{-2\pi}{9};\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}$

Partie D

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1. En déduire alors la valeur exacte de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

2. Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On applique la relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$**.**

Donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{(1+2\sqrt{5}+5)}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

Deux solutions envisageables $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ **ou** $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ **mais seule, la solution positive convient car** $\frac{\pi}{5}\in]0;\pi[$ **donc** $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$**.**

EXERCICE 3 : . Fonctions, dérivation et tangentes. (6 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{-6|x|+3}{|x|+2}$.

On donne en feuille annexe sa courbe représentative C_f dans un repère du plan.

PARTIE A

1. Justifier que la fonction f est définie pour tout réel $x\in\mathbb{R}$

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, f **est donc un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.**
Son dénominateur est strictement positif car, pour tout x **réel ,** $|x|\geqslant 0$ **donc** $|x|+2\geqslant 2>0$**.**
Donc f **est bien définie sur $\mathbb{R}$.**

2. Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[\,,\ f(x)=-6+\frac{15}{x+2}$

Sur $[0;+\infty[$ **,** $|x|=x$ **donc** $f(x)=\frac{-6x+3}{x+2}$**.**
D'autre part $-6+\frac{15}{x+2}=\frac{-6(x+2)+15}{x+2}=\frac{-6x+3}{x+2}$

Nous pouvons conclure : $\forall x\in[0;+\infty[\,,\ f(x)=-6+\frac{15}{x+2}$

3. a. En utilisant l'expression de la question précédente, montrer que f est une fonction strictement

décroissante sur $[0;+\infty[$.

Soient a et b deux réels tels que $0\leqslant a<b$, montrons que $f(a)>f(b)$.
Les inégalités suivantes sont équivalentes :

$0\leqslant a<b$

$2\leqslant a+2<b+2$ **. Ajouter 2 ne change pas l'ordre**

$\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{a+2}>\frac{1}{b+2}$ **. On inverse, or la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc l'ordre change.**

$\frac{15}{2}\geqslant\frac{15}{a+2}>\frac{15}{b+2}$ **. On multiplie par 15, nombre positif, pas de changement d'ordre.**

$-6+\frac{15}{2}\geqslant-6+\frac{15}{a+2}>-6+\frac{15}{b+2}$ **. On ajoute –6 pas de changement.**

$\frac{3}{2}\geqslant f(a)>f(b)$ **. Conclusion : f change l'ordre donc f est décroissante sur $[0;+\infty[$.**

b. En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$

Nous venons de montrer que f est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Donc si $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ alors $f(0)\geqslant f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Or $f(0)=\frac{3}{2}$ et $f(\frac{1}{2})=\frac{-6(\frac{1}{2})+3}{(\frac{1}{2})+2}=0$ donc $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$.

4. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$

$f(-x)=\frac{-6|-x|+3}{|-x|+2}$ **,or pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on a $|-x|=|x|$ donc $f(-x)=\frac{-6|x|+3}{|x|+2}=f(x)$**

PARTIE B

1. En utilisant un taux d'accroissement ou une formule de dérivation, montrer que le nombre dérivé de f en 3 est égal à $\frac{-3}{5}$.

► Avec une formule de dérivation

Sur $[0;+\infty[$, $f(x)=\frac{-6x+3}{x+2}$. f est un quotient.

Nous utilisons la formule de dérivation $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

avec $u(x)=-6x+3$; $u'(x)=-6$; $v(x)=x+2$; $v'(x)=1$;

Donc $f'(x)=\frac{-6(x+2)-(-6x+3)\times1}{(x+2)^2}=\frac{-15}{(x+2)^2}$ et $f'(3)=\frac{-15}{25}=\frac{-3}{5}$

► Avec un taux d'accroissement :

Par définition $f'(3)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$f(3+h)=-6+\frac{15}{3+h+2}=-6+\frac{15}{5+h}$ **;** $f(3)=-6+\frac{15}{3+2}=-3$ **donc** $f(3+h)-f(3)=-3+\frac{15}{5+h}=\frac{-3h}{5+h}$

et $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{-3}{5+h}$ **donc** $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{5+h}=\frac{-3}{5}$

Nous retrouvons $f'(3)=\frac{-3}{5}$

2. Donner une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 3 et tracer (T) sur la figure 1.

$f(3)=-3$ **et** $f'(3)=\frac{-3}{5}$

Donc (T) a pour équation réduite :

$y=\frac{-3}{5}(x-3)-3$ **=** $\frac{-3}{5}x-\frac{6}{5}$

3. Déterminer graphiquement $f'(-3)$

$f'(-3)$ **est le coefficient directeur de la tangente en B à** C_f**.**

On lit $f'(-3)=\frac{3}{5}$ **(à l'aide des pointillés)**