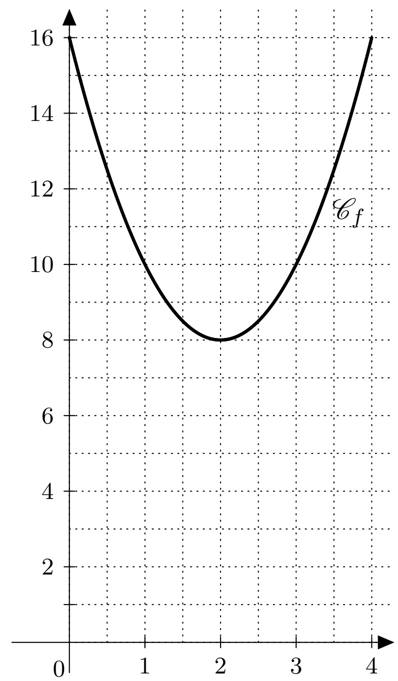
Devoir commun de mathématiques
Sujet A

Durée : 2 heures
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (16 points). — On considère la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la fonction f est représentée graphiquement par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

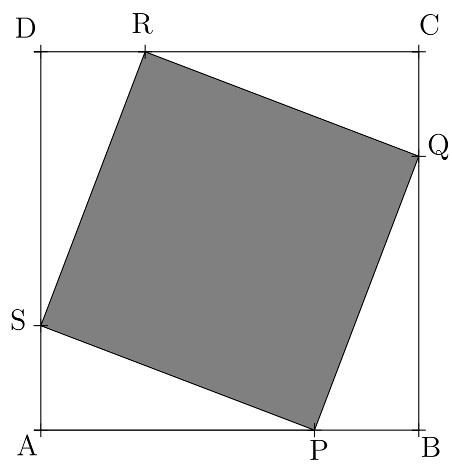


Partie A. — Étude graphique

On répondra aux questions de cette partie avec la précision permise par le graphique. On justifiera ses réponses.

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image de 1 puis l'image de 4 par f.
   b. Déterminer graphiquement les antécédents de 8 puis ceux de 13 par f.
2. **a.** Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;4]$.
   b. Déterminer le minimum de f sur $[0\,;4]$ et la valeur de x en laquelle il est atteint.
3. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 10$.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 10$.

Partie B. — Étude d'un problème concret



Une unité étant choisie, on considère un carré ABCD de côté 4. On note P, Q, R et S les points des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que AP = BQ = CR = DS.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du quadrilatère PQRS lorsque le point P décrit le segment [AB].
On pose AP = x.

1. Dans quel intervalle varie le réel x ? (Justifier.)
2. **a.** Calculer l'aire du triangle APS en fonction de x.
   b. En déduire l'aire du quadrilatère PQRS en fonction de x et vérifier que cette aire est égale à $f(x)$ où f est la fonction définie au début de l'exercice.
3. À partir des considérations graphiques de la partie A, que peut-on conjecturer sur :
   a. la position de P sur [AB] telle que l'aire de PQRS soit minimale ? (Justifier.)
   b. les positions de P sur [AB] telles que l'aire de PQRS soit égale à 10 ? (Justifier.)
4. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) = 2(x-2)^2 + 8$.
5. **a.** Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geq 8$. La conjecture de la question 3.a est-elle vérifiée ?
   b. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 10$. La conjecture de la question 3.b est-elle vérifiée ?

Exercice 2 (9 points). — Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A $(3\,;-2)$, B $(6\,;3)$ et C $(1\,;6)$.

1. Placer ces points sur une figure et représenter le triangle ABC.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.
3. Calculer les coordonnées du milieu D de [AC].
4. Justifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre D et déterminer le rayon de ce cercle.
   Représenter le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure.
5. On considère le point E de coordonnées $\left(-1\,;2+2\sqrt{2}\right)$.
   a. Démontrer que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   b. En déduire une méthode de construction précise du point E que l'on décrira explicitement puis effectuer cette construction sur la figure.

Exercice 3 (9 points). — On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un est blanc, l'autre est noir. On ajoute les deux chiffres obtenus et on note le résultat.

1. Compléter le tableau donné en annexe (page 3/3) et en déduire l'ensemble des issues possibles de cette expérience.
2. On considère les deux évènements A et B définis par :
   A : « le résultat est pair » B : « le résultat est strictement supérieur à 7 »
   Déterminer les probabilités P(A) et P(B) des évènements A et B.
3. Décrire l'évènement $A \cap B$ par une phrase puis déterminer sa probabilité.
4. Décrire l'évènement $A \cup B$ par une phrase puis calculer sa probabilité.
5. On considère l'évènement $C = \overline{A \cup B}$.
   Décrire l'évènement C à l'aide d'une phrase puis déterminer la probabilité de C.

Exercice 4 (6 points). — Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Pour chaque question, on demande d'entourer sur l'annexe (page 3/3), la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1,5 point. L'absence de réponse, ou le fait de donner plusieurs réponses pour une même question, n'enlève ni ne rapporte aucun point. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Pour tous réels a et b, le nombre $(a^2+b)^2$ est égal à :

   a) a^4+b^2 b) $a^4+b^2+2a^4b^2$ c) $a^4+b^2+2a^2b$ d) $a^2+2ab+b^2$.

2. Si f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-x^2+2x+1$ alors l'image de -1 par f est :

   a) -2 b) 0 c) 2 d) 4.

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(x+1)^2=1$ est :

   a) $\{0\}$ b) $\{-1\,;1\}$ c) $\varnothing$ d) $\{-2\,;0\}$.

4. On fait fonctionner l'algorithme ci-contre avec le nombre $x=-\dfrac{1}{2}$ en entrée. On obtient alors en sortie le nombre :

   a) 0 b) $\dfrac{5}{4}$ c) 1 d) $\dfrac{3}{4}$.

Entrée :	Saisir un réel x
Traitement :	Si $3x > -1$
	Affecter à S le nombre $x+\dfrac{1}{2}$
	Sinon affecter à S le nombre x^2+1
	Fin Si
Sortie :	Afficher S.

Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

$\boxed{\text{ANNEXE}}$

À DÉTACHER ET À RENDRE AVEC SA COPIE

Exercice 3

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2					
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

Exercice 4 (Q.C.M)

Question 1	a	b	c	d
Question 2	a	b	c	d
Question 3	a	b	c	d
Question 4	a	b	c	d