Corrigé devoir commun n° 3 Seconde Mai 2012

Exercice 1

Partie A:

1. a) La fonction est une fonction homographique de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$ avec a = 150, b = 0, c = 1 et d = 100.

b) La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.

2. On a $150 - \frac{15000}{x+100} = \frac{150(x+100)-15000}{x+100} = \frac{150x+15000-15000}{x+100} = \frac{150x}{x+100} = f(x)$.

3. Soient a et b deux réels de l'intervalle]– 100 ; +∞ [tels que $-100 < a < b$; alors $0 < a+100 < b+100$; on passe à l'inverse : $\frac{1}{a+100} > \frac{1}{b+100}$; on multiplie par – 15000 : $\frac{-15000}{a+100} < \frac{-15000}{b+100}$;

on ajoute 150 : $f(a) < f(b)$; l'ordre est conservé donc la fonction f est croissante sur l'intervalle]– 100 ; +∞ [.

4. Tableau de valeurs :

x	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$f(x)$	-64,3	-37,5	-16,67	0	13,64	25	34,62	42,86	50	56,25	61,76	66,7	71,05	75	78,57	81,82	84,78

5. Tracé.

6. a) Équation $f(x) = 30$: avec la première expression : $\frac{150x}{x+100} = 30$ équivaut à $150x = 30(x+100)$ équivaut à $150x = 30x + 3000$ équivaut à $120x = 3000$ équivaut à $x = 25$. La solution est $x = 25$.

b) Inéquation $f(x) \geqslant 85$: avec la deuxième expression : $150 - \frac{15000}{x+100} \geqslant 85$ équivaut à $-\frac{15000}{x+100} \geqslant -65$ équivaut à $\frac{15000}{x+100} \leqslant 65$ équivaut à $\frac{x+100}{15000} \geqslant \frac{1}{65}$ équivaut à $x + 100 \geqslant \frac{15000}{65}$ équivaut à $x \geqslant \frac{15000}{65} - 100$ équivaut à $x \geqslant \frac{15000-6500}{65}$ équivaut à $x \geqslant \frac{85500}{65}$ équivaut à $x \geqslant \frac{1700}{13}$. La solution est $[\frac{1700}{13} ;+\infty[$.

7. Résolution graphique de l'inéquation : $f(x) > g(x)$: S =] – 25 ; 50[

8. a) $f(x) > g(x)$ équivaut à $\frac{150x}{x+100} > \frac{4}{3}x - \frac{50}{3}$ équivaut à $\frac{150x}{x+100} - \frac{4}{3}x + \frac{50}{3} > 0$ équivaut à $\frac{3\times150x+(x+100)(-4x+50)}{3(x+100)} > 0$ équivaut à $\frac{-4x^2+50x-400x+5000+450x}{3(x+100)} > 0$ équivaut à $\frac{-4x^2+100x+5000}{3(x+100)} > 0$.

b) On a $\frac{4(50-x)(x+25)}{3(x+100)} = \frac{4(50x+1250-x^2-25x)}{3(x+100)} = \frac{200x+5000-4x^2-100x}{3(x+100)} = \frac{-4x^2+100x+5000}{3(x+100)}$.

c) Le dénominateur est strictement positif sur]– 100 ; +∞ [; On réalise un tableau de signes pour le numérateur : $50 - x = 0$ pour $x = 50$ et $x + 25 = 0$ pour $x = -25$.

x	– 100		– 25		50		+∞
$50 - x$		+		+	0	–	
$x + 25$		–	0	+		+	
$(50 - x)(x + 25)$		–	0	+	0	–	

D'où S =]– 25 ; 50[.

9. b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > x$: S =]0 ; 50[.

Partie B : 1. a) La première partie du voyage dure 200/50 = 4 heures.

b) Dans la deuxième partie du voyage, le temps t est égal à $\frac{400}{x}$.

2. La vitesse moyenne v du voyage vérifie $600 = v(4 + \frac{400}{x})$, d'où $v = \frac{600}{4+\frac{400}{x}} = \frac{600}{\frac{4x+400}{x}} = \frac{600x}{4x+400} = \frac{150x}{x+100}$ en simplifiant par 4, soit $v = f(x)$.

3. a) Si $v \leqslant 50$, alors $150 - \frac{15000}{x+100} \leqslant 50$, alors $-\frac{15000}{x+100} \leqslant -100$ alors $\frac{15000}{x+100} \geqslant 100$ alors $\frac{x+100}{15000} \leqslant \frac{1}{100}$ équivaut à $x + 100 \leqslant \frac{15000}{100}$ équivaut à $x \leqslant 50$. Les conditions de circulation sont difficiles.

b) Si $v = 30$, alors $f(x) = 30$ et d'après la partie A, $x = 25$.

4. On suppose que $x = 130$ (vitesse maximale), alors $v = f(x) = \dfrac{150\times130}{130+100} = \dfrac{19500}{230} = 84{,}78$. Donc la vitesse moyenne v ne peut pas être égale à 85 km/h.

<u>Exercice 2</u>

1. C ; 2. C ; 3. B ; 4. B ; 5.C ; 6. A ; 7. A ; 8. B.

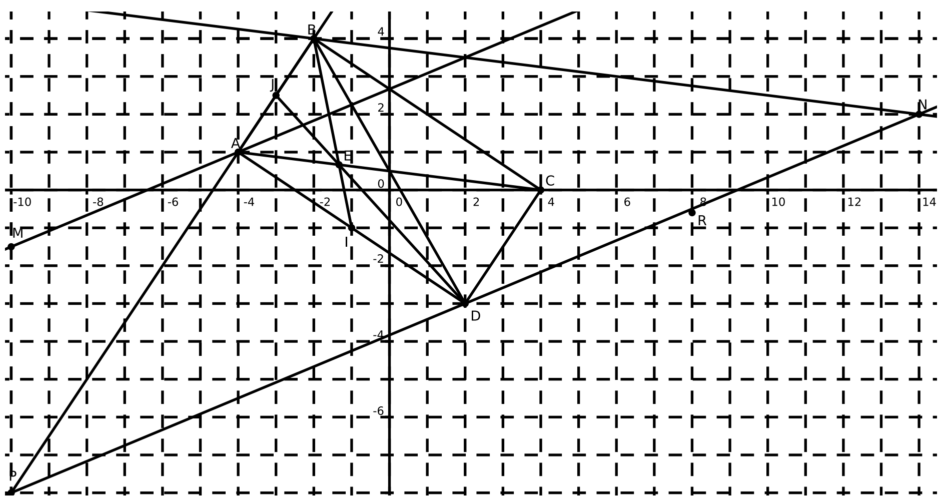
<u>Exercice 3</u>

<u>Partie A</u>

1. Coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ $(x_C - x_B\,;\, y_C - y_B)$, soit $\overrightarrow{BC}$ $(6 ; -4)$; Coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ $(x_D - x_A\,;\, y_D - y_A)$, soit $\overrightarrow{AD}$ $(x_D + 4\,;\, y_D - 1)$; ainsi $x_D + 4 = 6$, d'où $x_D = 2$; $y_D - 1 = -4$, d'où $y_D = -3$. D(2 ; – 3).
2. Si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, alors ABCD est un parallélogramme.
3. Coordonnées de I milieu de [AD] : $x_I = \dfrac{x_A+x_D}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $y_I = \dfrac{y_A+y_D}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$. I(– 1 ; – 1).
4. Coordonnées de J milieu de [AB] : $x_J = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $y_J = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{1+4}{2} = 2{,}5$. J(– 3 ; 2,5).
5. Les droites (BI) et (DJ) sont des médianes du triangle ABD, donc E est le centre de gravité de ce triangle.
Comme $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, soit $3\,\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;
d'où $x_E = \dfrac{x_A+x_B+x_D}{3} = \dfrac{-4-2+2}{3} = \dfrac{-4}{3}$ et $y_E = \dfrac{y_A+y_B+y_D}{3} = \dfrac{1+4-3}{3} = \dfrac{2}{3}$.
Pour montrer que les points A, E et C sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :
$\overrightarrow{AE}\left(\dfrac{8}{3} ; \dfrac{-1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AC}$ (8 ; – 1) ; on voit que $3\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et les points A, E et C sont alignés.

Partie B

1. Les points sur la figure.



2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ (– 2 ; – 3) et $\overrightarrow{CA}$ (– 8 ; 1),
puis de $\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ $\left(-6 ; \dfrac{-5}{2}\right)$
et $\overrightarrow{AM}$ $\left(-6 ; \dfrac{-5}{2}\right)$,
d'où $x_M - x_A = -6$,
soit $x_M = -10$,
et $y_M - y_A = \dfrac{-5}{2}$,
soit $y_M = \dfrac{-3}{2}$; M$\left(-10 ; \dfrac{-3}{2}\right)$.

On procède de la même manière pour les autres points ; on trouve N(14 ; 2), P(– 10 ; – 8) et R(8 ; – 0,6).

3. $\overrightarrow{AM}\left(-6 ; \dfrac{-5}{2}\right)$, et $\overrightarrow{PN}$ (24 ; 10) ; et $-6\times10 - 24\times\dfrac{-5}{2} = -60 + 60 = 0$; donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires et les droites (AM) et (PN) sont parallèles.
4. $\overrightarrow{PN}$ (24 ; 10) et $\overrightarrow{PR}$ (18 ; 7,4) ; et $24\times7{,}4 - 10\times18 = 177{,}6 - 180 = -2{,}4 \neq 0$; donc les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires, donc les points P, N et R ne sont pas alignés.