Correction du devoir commun de Mathématiques
SECONDES
du 13 novembre 2014

Durée 2 heures. Calculatrice autorisée.

Question de cours : 2 points

Soit f une fonction telle que $f(2) = 3$. Ecrire trois phrases traduisant cette égalité, l'une utilisant le mot « image », une autre utilisant le mot « antécédent » et enfin la dernière utilisant le mot « courbe ».

Réponse : 3 est l'image de 2 par la fonction f ; 2 est un antécédent de 3 par f ; la courbe de f passe par le point de coordonnées (2 ;3)

Vrai – Faux : 4 points

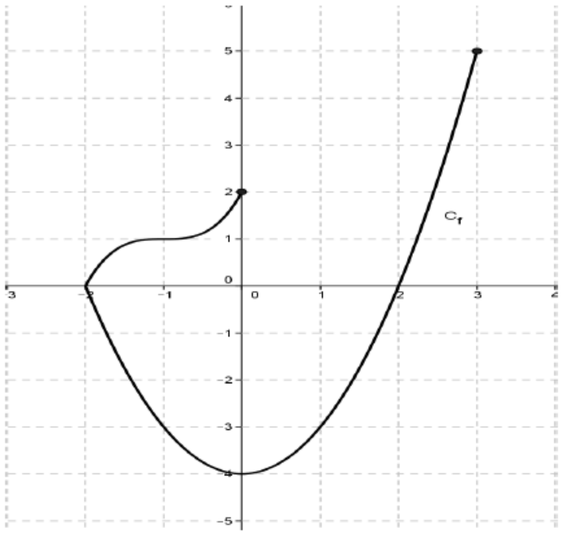
Pour chacune des affirmations ci-dessous dire si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$
   Affirmation 1 : « Un antécédent de 0,75 par la fonction f est $-\sqrt{3}$. »

2. g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. a et b désignent deux nombres réels.
   Affirmation 2 : « Si $g(a) = g(b)$ alors $a = b$. »

3. On désigne par C_h la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 3$.
   Affirmation 3 : « La courbe C_h coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3. »

4. *Affirmation 4* : « La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f et $f(-1) = 1$ »



Réponse :

1. On calcule $f\left(-\sqrt{3}\right) = \cdots = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Donc l'affirmation 1 est vraie.
2. Affirmation 2 fausse. Voici un contre-exemple : prenons comme fonction la fonction carrée : g(x) = x^2 ; alors g(3)=g(-3) = 9.
3. On calcule h(0)= …=3, donc C_h passe par le point (0 ; 3), donc elle coupe bien l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3. Affirmation 3 vraie.
4. L'affirmation 4 est fausse : cette courbe ne peut pas être la représentation graphique d'une fonction car un nombre admet une unique image par une fonction.

EXERCICE 1 : 5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : le cm ou le carreau) , on considère les points :
E (- 2 : 3) , F (1 ; 4) et G (3 ; - 2).

a) Réaliser une figure que vous compléterez tout au long de l'exercice.

b) Montrer que EF= $\sqrt{10}$.

c) Montrer que le triangle EFG est rectangle en F.

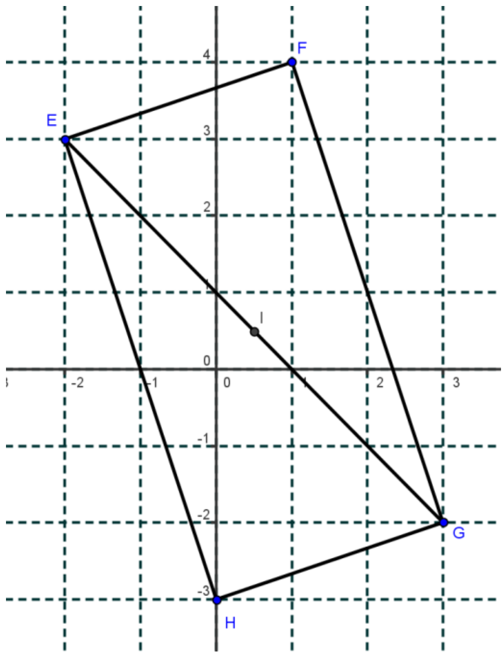
d) Calculer les coordonnées de I milieu du segment [EG].

e) Soit H le symétrique de F par rapport à I. Calculer les coordonnées de H.

f) Jean affirme que le quadrilatère EFGH est un carré. Qu'en penses-tu ? Argumente.

<u>Réponse</u> :

a)



b) $EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

De même : $FG=\sqrt{40}$ et $EG=\sqrt{50}$

c) $EG^2=50$

$EF^2+FG^2=10+40=50$

Ainsi : $EG^2=EF^2+FG^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

d) I milieu de [EG]

$x_I=\frac{x_E+x_G}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$

$y_I=\frac{y_E+y_G}{2}=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$

$I(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

e) H est le symétrique de F par rapport à I.
Donc I est le milieu de [FH].

Ainsi : $x_I=\frac{x_F+x_H}{2}$

ce qui donne $\frac{1+x_H}{2}=\frac{1}{2}$

d'où $1+x_H=1$ et donc $x_H=0$

On a aussi : $y_I=\frac{y_F+y_H}{2}$

ce qui donne $\frac{4+y_H}{2}=\frac{1}{2}$

d'où $4+y_H=1$ et donc $y_H=-3$

Finalement : H (0 ; - 3).

f) EFGH semble être un rectangle.
Démonstration :
I est le milieu de [EG] et de [FH] (voir e)) donc les diagonales [EG] et [FH] ont le même milieu. EFGH est donc un parallélogramme.
Comme de plus, il a un angle droit en F (voir c)) , EFGH est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle.

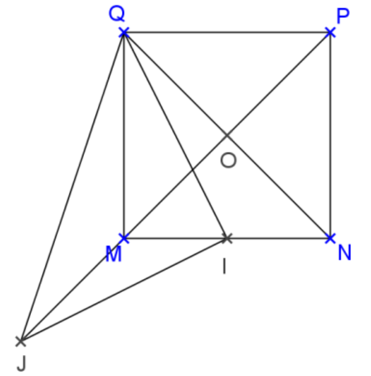
EXERCICE 2 : 3 points

Voici un problème posé dans une classe de 2nde :

Soit MNPQ un carré de centre O et de côté 1.

Soit I le milieu du segment [MN] et J le symétrique de O par rapport à M.

Que pensez-vous du triangle IJQ ?



Pour répondre au problème, Arthur place le carré dans un repère orthonormé et trouve que IJ = $\frac{\sqrt{5}}{2}$, ce qui lui sert pour démontrer que le triangle possède certaines particularités.

En reprenant la démarche d'Arthur, répondre au problème.

Réponse :

On se place dans le repère (M ; N, Q) qui est orthonormé car MNPQ est un carré.

Dans ce repère on a : M(0 ; 0) ; I(0,5 ; 0) ; Q(0 ; 1) et J(-0,5 ; 0,5).

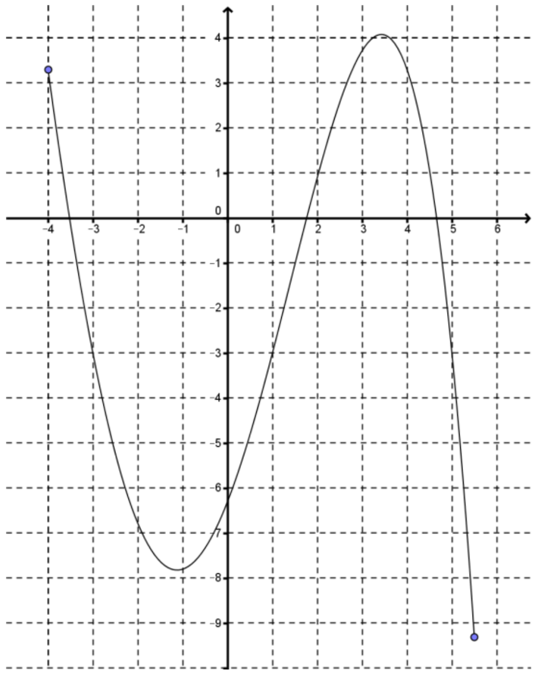
On calcule : $IJ = \sqrt{\left(x_J - x_I\right)^2 + \left(y_J - y_I\right)^2} = \sqrt{(-0{,}5 - 0{,}5)^2 + (0{,}5 - 0)^2} = \sqrt{1{,}25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $IQ = \cdots = \sqrt{1{,}25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $JQ = \cdots = \sqrt{2{,}5}$.

De plus : IQ² + IJ² =1,25 +1,25 = 2,5 et JQ² = 2,5. Donc on a IQ² + IJ² = JQ². Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJQ est rectangle en I.

Donc le triangle IJQ est isocèle (IJ = IQ) rectangle en I.

EXERCICE 3 : 3 points

Voici la courbe représentative d'une fonction f.



Par lecture graphique, en faisant apparaitre les traits de lecture sur le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Donner l'image par f de 2.
2. Préciser $f(-1)$.
3. Déterminer les antécédents éventuels de – 3 par f .
4. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

Réponse :

1. $f\,(2) \approx 1$
2. $f(-1) \approx -7{,}8$
3. -3 a pour antécédents par f environ -3 ; 1 et 5
4. L'équation f(x) = 0 a pour solution environ :-3,5 ; 1,75 et 4,7.

EXERCICE 4 : 3 points

Malik est un élève passionné de sciences. Il s'est intéressé à la température du garage de sa maison à différents moments de la journée. Il a obtenu les résultats suivants :

Heure	8h	12h	16h
Température	14,5°C	15,75°C	13°C

Il aimerait pouvoir calculer la température du garage en fonction de l'heure de la journée. N'arrivant pas à trouver la bonne formule, il demande de l'aide à sa grande sœur, étudiante en mathématiques, qui lui dit :
« Tu enlèves l'heure à 22,5 puis tu multiplies le résultat par cette même heure et tu divises le tout par 8. »

Questions :

1) Quelle est l'expression algébrique de cette fonction ?

2) Donner un tableau de valeurs qui donne la température toutes les deux heures (de 0 heure à minuit) puis dessiner une représentation graphique de cette fonction.

3) Avec cette fonction, quelle est la température du garage de Malik à 13H30 ? Argumenter.

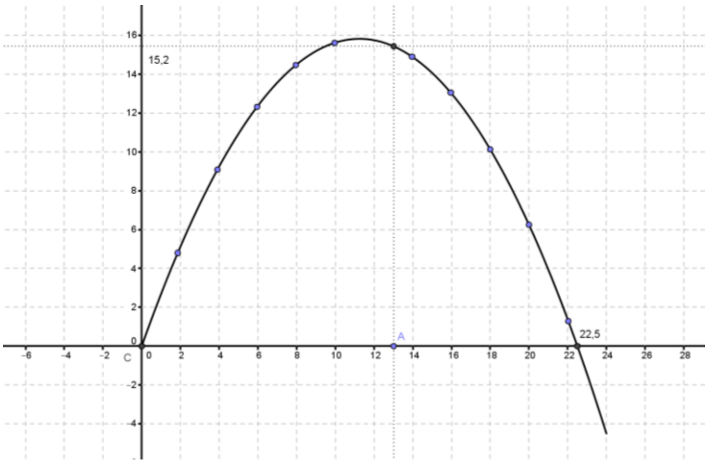
4) Avec cette fonction, à quelle(s) heure(s) de la journée, le thermomètre affiche 0°C ? Argumenter.

Réponse :

1) Si ***x*** est l'heure alors la température est : ***(22,5-x)x/8.***

2)

x	***0***	***2***	***4***	***6***	***8***	***10***	***12***
T(x)	***0***	***5,13***	***9,25***	***12,38***	***14,5***	***15,63***	***15,75***
x	***14***	***16***	***18***	***20***	***22***	***24***	
T(x)	***14,88***	***13***	***10,13***	***6,25***	***1,38***	***-4,5***	



3) Avec le graphique, on peut conjecturer qu'à 13H30, la température est de 15,2°C. Par le calcul, T(13,5)=15,1875°C.

4) Avec le graphique, 0°C est atteint à 0h et à 22H30. Par le calcul, on résout ***(22,5-x)x/8=0*** qui est équivalente à l'équation produit : ***(22,5-x)x=0*** qui donne deux solutions 0 et 22,5 donc 0h et 22H30.