Corrigé de l'exercice 1

▶1. On considère la fonction k définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $k(x) = \dfrac{-5x-7}{5x+7}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x+7=0$.

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 0 \\ 5x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{5} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{7}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

$$k'(x) = \frac{(-5) \times (5x+7) - (-5x-7) \times 5}{(5x+7)^2} = \frac{0}{(5x+7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(5x+7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $0 > 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) > 0$.

x	0		10
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	-1	$\nearrow$	-1

▶2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 3x^3 + \dfrac{27}{2}x^2 - 252x + 6$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$k'(x) = 9x^2 + 27x - 252$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 27^2 - 4 \times 9 \times (-252) = 9\,801$ et $\sqrt{9\,801} = 99$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-27-\sqrt{9\,801}}{2\times 9} &= \frac{-27-\sqrt{9\,801}}{18} \\ &= \frac{-27-99}{18} \\ &= \frac{-126}{18} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-27+\sqrt{9\,801}}{2\times 9} &= \frac{-27+\sqrt{9\,801}}{18} \\ &= \frac{-27+99}{18} \\ &= \frac{72}{18} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = 4$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-7		4		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	-10		-7		4		10
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	876	$\nearrow$	$\frac{2805}{2}$	$\searrow$	-594	$\nearrow$	1836

Corrigé de l'exercice 2

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-2\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{-5x+4}{-3x-8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-3x - 8 = 0$.

$$\begin{aligned} -3x - 8 &= 0 \\ -3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{-3} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{8}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-2\ ;\ 10]$.

$$f'(x) = \frac{(-5) \times (-3x-8) - (-5x+4) \times (-3)}{(-3x-8)^2} = \frac{52}{(-3x-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-3x-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $52 > 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) > 0$.

x	-2		10
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-7	$\nearrow$	$\frac{23}{19}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 + 15x^2 - 144x - 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 6x^2 + 30x - 144$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 30^2 - 4 \times 6 \times (-144) = 4\,356$ et $\sqrt{4\,356} = 66$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-30 - \sqrt{4\,356}}{2 \times 6} &= \frac{-30 - \sqrt{4\,356}}{12} \\ &= \frac{-30 - 66}{12} \\ &= \frac{-96}{12} \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-30 + \sqrt{4\,356}}{2 \times 6} &= \frac{-30 + \sqrt{4\,356}}{12} \\ &= \frac{-30 + 66}{12} \\ &= \frac{36}{12} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -8$ et $x_2 = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-8		3		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-8		3		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	930	$\nearrow$	$1\,078$	$\searrow$	-253	$\nearrow$	$2\,050$

Corrigé de l'exercice 3

▶1. On considère la fonction g définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $g(t) = \dfrac{3t-8}{4t-3}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4t - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 4t - 3 &= 0 \\ 4t &= 3 \\ t &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{3}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$g'(t) = \frac{3 \times (4t-3) - (3t-8) \times 4}{(4t-3)^2} = \frac{23}{(4t-3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(4t-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $23 > 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) > 0$.

t	-10		0
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\dfrac{38}{43}$	$\nearrow$	$\dfrac{8}{3}$

▶2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 - \dfrac{33}{2}x^2 + 90x - 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$g'(x) = 3x^2 - 33x + 90$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-33)^2 - 4 \times 3 \times 90 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-(-33)-\sqrt{9}}{2\times 3} = \frac{33-\sqrt{9}}{6} = \frac{33-3}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{-(-33)+\sqrt{9}}{2\times 3} = \frac{33+\sqrt{9}}{6} = \frac{33+3}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

Les racines de g' sont $x_1 = 5$ et $x_2 = 6$.

x	-10 10
$g'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $g'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale g est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $k(t) = \dfrac{-2t-3}{-4t-7}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-4t-7=0$.

$$-4t-7=0$$
$$-4t=7$$
$$t=\frac{7}{-4}$$

Or $-\dfrac{7}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$k'(t) = \frac{(-2)\times(-4t-7)-(-2t-3)\times(-4)}{(-4t-7)^2} = \frac{2}{(-4t-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-4t-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $2 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	-1 10
$k'(x)$	$+$
$k(x)$	$\frac{1}{3}$ ↗ $\frac{23}{47}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x - 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 3x^2 + 9x - 12$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 9^2 - 4\times 3\times(-12) = 225$ et $\sqrt{225} = 15$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-9-\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-9-\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-9-15}{6}\\ &= \frac{-24}{6}\\ &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-9+\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-9+\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-9+15}{6}\\ &= \frac{6}{6}\\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-4		1		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-4		1		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	-432	$\nearrow$	54	$\searrow$	$-\frac{17}{2}$	$\nearrow$	$1\,328$

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{-3t-1}{-5t-8}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5t-8=0$.

$$\begin{aligned}-5t-8 &= 0\\ -5t &= 8\\ t &= \frac{8}{-5}\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{8}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{(-3)\times(-5t-8)-(-3t-1)\times(-5)}{(-5t-8)^2} = \frac{19}{(-5t-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-5t-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $19 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	-1		10
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{31}{58}$

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 2x^3 - 33x^2 + 180x - 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 6x^2 - 66x + 180$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-66)^2 - 4 \times 6 \times 180 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-66)-\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{66-\sqrt{36}}{12}\\ &= \frac{66-6}{12}\\ &= \frac{60}{12}\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-66)+\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{66+\sqrt{36}}{12}\\ &= \frac{66+6}{12}\\ &= \frac{72}{12}\\ &= 6\end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = 5$ et $x_2 = 6$.

x	-10 10
$q'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $q'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale q est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.