Corrigé de l'exercice 1

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

907 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}774 &= 2\times 387\\ &= 2\times 3\times 129\\ &= 2\times 3\times 3\times 43\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}279 &= 3\times 93\\ &= 3\times 3\times 31\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4606 &= 2\times 2303\\ &= 2\times 7\times 329\\ &= 2\times 7\times 7\times 47\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2350 &= 2\times 1175\\ &= 2\times 5\times 235\\ &= 2\times 5\times 5\times 47\end{aligned}$$

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 4 606 et 2 350.
D'après la question 1), on sait que les nombres 4 606 et 2 350 ont comme facteurs premiers communs : 2,47.
On en déduit que le PGCD des nombres 4 606 et 2 350 est : $2\times 47 = 94$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 4 606 et de 2 350.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a\times b = PGCD(a;\ b)\times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(4\,606;\ 2\,350) = \dfrac{4\,606\times 2\,350}{94} = 115\,150$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(4\,606;\ 2\,350) = 94 = 2\times 47$, alors les "facteurs complémentaires" de $4\,606 = 2\times 7\times 7\times 47$ sont : 7 , 7. On en déduit que $PPCM(4\,606;\ 2\,350) = 2\,350\times 7\times 7 = 115\,150$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 279 est :
$279 = 3\times 3\times 31$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 31.
Le nombre cherché est par conséquent 31 et le carré parfait obtenu est 8 649.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(4 606 ; 2 350) = 94, donc on obtient :
$\dfrac{4\,606_{\div 94}}{2\,350_{\div 94}} = \dfrac{49}{25}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 4 606 et 2 350, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{17_{\times 25}}{4\,606_{\times 25}} + \dfrac{21_{\times 49}}{2\,350_{\times 49}} = \dfrac{425}{115\,150} + \dfrac{1\,029}{115\,150} = \dfrac{1\,454_{\div 2}}{115\,150_{\div 2}} = \dfrac{727}{57\,575}$.

Corrigé de l'exercice 2

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}1716 &= 2 \times 858\\ &= 2 \times 2 \times 429\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 143\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1584 &= 2 \times 792\\ &= 2 \times 2 \times 396\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 198\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 99\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 33\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11\end{aligned}$$

463 est un nombre premier.
877 est un nombre premier.
347 est un nombre premier.

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 716 et 1 584.
D'après la question 1), on sait que les nombres 1 716 et 1 584 ont comme facteurs premiers communs : 2,2,3,11.
On en déduit que le PGCD des nombres 1 716 et 1 584 est : $2 \times 2 \times 3 \times 11 = 132$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 716 et de 1 584.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(1\,716;\ 1\,584) = \dfrac{1\,716 \times 1\,584}{132} = 20\,592$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(1\,716;\ 1\,584) = 132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,716 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 13$ est : 13. On en déduit que $PPCM(1\,716;\ 1\,584) = 1\,584 \times 13 = 20\,592$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 347 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 347.
Le nombre cherché est par conséquent 347 et le carré parfait obtenu est 120 409.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(1 716 ; 1 584) = 132, donc on obtient :
$\dfrac{1\,716_{\div 132}}{1\,584_{\div 132}} = \dfrac{13}{12}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 716 et 1 584, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{34_{\times 12}}{1\,716_{\times 12}} + \dfrac{20_{\times 13}}{1\,584_{\times 13}} = \dfrac{408}{20\,592} + \dfrac{260}{20\,592} = \dfrac{668_{\div 4}}{20\,592_{\div 4}} = \dfrac{167}{5\,148}$.

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$551 = 19 \times 29$

$$\begin{aligned}171 &= 3 \times 57\\ &= 3 \times 3 \times 19\end{aligned}$$

$87 = 3 \times 29$

283 est un nombre premier.
599 est un nombre premier.

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 171 et 551.
D'après la question 1), on sait que les nombres 171 et 551 ont comme facteurs premiers communs : 19.
On en déduit que le PGCD des nombres 171 et 551 est : 19.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 171 et de 551.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(171;\ 551) = \dfrac{171 \times 551}{19} = 4\,959$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(171;\ 551) = 19$, alors les "facteurs complémentaires" de $171 = 3 \times 3 \times 19$ sont : 3 , 3. On en déduit que $PPCM(171;\ 551) = 551 \times 3 \times 3 = 4\,959$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 87 est :
$87 = 3 \times 29$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 3 et 29.
Le nombre cherché est par conséquent 87 et le carré parfait obtenu est 7 569.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(171 ; 551) = 19, donc on obtient :
$\dfrac{171_{\div 19}}{551_{\div 19}} = \dfrac{9}{29}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 171 et 551, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{12_{\times 29}}{171_{\times 29}} + \dfrac{29_{\times 9}}{551_{\times 9}} = \dfrac{348}{4\,959} + \dfrac{261}{4\,959} = \dfrac{609_{\div 87}}{4\,959_{\div 87}} = \dfrac{7}{57}$.

Corrigé de l'exercice 4

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}120 &= 2 \times 60\\ &= 2 \times 2 \times 30\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 15\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5\end{aligned}$$

353 est un nombre premier.

$298 = 2 \times 149$

$178 = 2 \times 89$

$$\begin{aligned}108 &= 2 \times 54\\ &= 2 \times 2 \times 27\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 9\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3\end{aligned}$$

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 120 et 108.
D'après la question 1), on sait que les nombres 120 et 108 ont comme facteurs premiers communs : 2,2,3.
On en déduit que le PGCD des nombres 120 et 108 est : $2 \times 2 \times 3 = 12$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 120 et de 108.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(120;\ 108) = \dfrac{120 \times 108}{12} = 1\,080$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(120;\ 108) = 12 = 2 \times 2 \times 3$, alors les "facteurs complémentaires" de $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ sont : 2 , 5. On en déduit que $PPCM(120;\ 108) = 108 \times 2 \times 5 = 1\,080$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 298 est :

$298 = 2 \times 149$.

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 149.

Le nombre cherché est par conséquent 298 et le carré parfait obtenu est 88 804.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(120 ; 108) = 12, donc on obtient :
$\dfrac{120{\scriptstyle \div 12}}{108{\scriptstyle \div 12}} = \dfrac{10}{9}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 120 et 108, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{28{\scriptstyle \times 9}}{120{\scriptstyle \times 9}} + \dfrac{42{\scriptstyle \times 10}}{108{\scriptstyle \times 10}} = \dfrac{252}{1\,080} + \dfrac{420}{1\,080} = \dfrac{672{\scriptstyle \div 24}}{1\,080{\scriptstyle \div 24}} = \dfrac{28}{45}$.