

Corrigé de l'exercice 1

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned} 470 &= 2 \times 235 \\ &= 2 \times 5 \times 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 96 &= 2 \times 48 \\ &= 2 \times 2 \times 24 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 430 &= 2 \times 215 \\ &= 2 \times 5 \times 43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 440 &= 2 \times 220 \\ &= 2 \times 2 \times 110 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 55 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11 \end{aligned}$$

401 est un nombre premier.

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 430 et 440.

D'après la question 1), on sait que les nombres 430 et 440 ont comme facteurs premiers communs : 2, 5.

On en déduit que le PGCD des nombres 430 et 440 est : $2 \times 5 = 10$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 430 et de 440.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(430; 440) = \frac{430 \times 440}{10} = 18\,920.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(430; 440) = 10 = 2 \times 5$, alors les "facteurs complémentaires" de $430 = 2 \times 5 \times 43$ est : 43. On en déduit que $PPCM(430; 440) = 440 \times 43 = 18\,920$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 470 est :

$$470 = 2 \times 5 \times 47.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2, 5 et 47.

Le nombre cherché est par conséquent 470 et le carré parfait obtenu est 220 900.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(430; 440) = 10$, donc on obtient :

$$\frac{430 \div 10}{440 \div 10} = \frac{43}{44}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 430 et 440, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{46 \times 44}{430 \times 44} + \frac{18 \times 43}{440 \times 43} = \frac{2\,024}{18\,920} + \frac{774}{18\,920} = \frac{2\,798 \div 2}{18\,920 \div 2} = \frac{1\,399}{9\,460}.$$

Corrigé de l'exercice 2

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}
 216 &= 2 \times 108 \\
 &= 2 \times 2 \times 54 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 27 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3
 \end{aligned}$$

929 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}
 684 &= 2 \times 342 \\
 &= 2 \times 2 \times 171 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 57 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1254 &= 2 \times 627 \\
 &= 2 \times 3 \times 209 \\
 &= 2 \times 3 \times 11 \times 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 780 &= 2 \times 390 \\
 &= 2 \times 2 \times 195 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 65 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13
 \end{aligned}$$

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 684 et 1 254.

D'après la question 1), on sait que les nombres 684 et 1 254 ont comme facteurs premiers communs : 2, 3, 19.

On en déduit que le PGCD des nombres 684 et 1 254 est : $2 \times 3 \times 19 = 114$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 684 et de 1 254.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(684; 1\,254) = \frac{684 \times 1\,254}{114} = 7\,524.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(684; 1\,254) = 114 = 2 \times 3 \times 19$, alors les "facteurs complémentaires" de 684 = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 19$ sont : 2, 3. On en déduit que $PPCM(684; 1\,254) = 1\,254 \times 2 \times 3 = 7\,524$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 780 est :

$$780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 3, 5 et 13.

Le nombre cherché est par conséquent 195 et le carré parfait obtenu est 152 100.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(684; 1\,254) = 114$, donc on obtient :

$$\frac{684 \div 114}{1\,254 \div 114} = \frac{6}{11}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 684 et 1 254, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{46 \times 11}{684 \times 11} + \frac{16 \times 6}{1\,254 \times 6} = \frac{506}{7\,524} + \frac{96}{7\,524} = \frac{602 \div 2}{7\,524 \div 2} = \frac{301}{3\,762}.$$

Corrigé de l'exercice 3

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned} 2162 &= 2 \times 1081 \\ &= 2 \times 23 \times 47 \end{aligned}$$

709 est un nombre premier.

$$\begin{aligned} 564 &= 2 \times 282 \\ &= 2 \times 2 \times 141 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 47 \end{aligned}$$

$$901 = 17 \times 53$$

$$649 = 11 \times 59$$

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 2 162 et 564.

D'après la question 1), on sait que les nombres 2 162 et 564 ont comme facteurs premiers communs : 2, 47.

On en déduit que le PGCD des nombres 2 162 et 564 est : $2 \times 47 = 94$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 2 162 et de 564.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(2\ 162; 564) = \frac{2\ 162 \times 564}{94} = 12\ 972.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(2\ 162; 564) = 94 = 2 \times 47$, alors les "facteurs complémentaires" de $2\ 162 = 2 \times 23 \times 47$ est : 23. On en déduit que $PPCM(2\ 162; 564) = 564 \times 23 = 12\ 972$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 901 est :

$$901 = 17 \times 53.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 17 et 53.

Le nombre cherché est par conséquent 901 et le carré parfait obtenu est 811 801.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(2\ 162; 564) = 94$, donc on obtient :

$$\frac{2\ 162 \div 94}{564 \div 94} = \frac{23}{6}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 2 162 et 564, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{37 \times 6}{2\ 162 \times 6} + \frac{26 \times 23}{564 \times 23} = \frac{222}{12\ 972} + \frac{598}{12\ 972} = \frac{820 \div 4}{12\ 972 \div 4} = \frac{205}{3\ 243}.$$

Corrigé de l'exercice 4

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned} 806 &= 2 \times 403 \\ &= 2 \times 13 \times 31 \end{aligned}$$

$$82 = 2 \times 41$$

$$\begin{aligned} 754 &= 2 \times 377 \\ &= 2 \times 13 \times 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 585 &= 3 \times 195 \\ &= 3 \times 3 \times 65 \\ &= 3 \times 3 \times 5 \times 13 \end{aligned}$$

179 est un nombre premier.

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 806 et 754.

D'après la question 1), on sait que les nombres 806 et 754 ont comme facteurs premiers communs : 2, 13.

On en déduit que le PGCD des nombres 806 et 754 est : $2 \times 13 = 26$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 806 et de 754.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(806; 754) = \frac{806 \times 754}{26} = 23\,374.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(806; 754) = 26 = 2 \times 13$, alors les "facteurs complémentaires" de $806 = 2 \times 13 \times 31$ est : 31. On en déduit que $PPCM(806; 754) = 754 \times 31 = 23\,374$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 585 est :

$$585 = 3 \times 3 \times 5 \times 13.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 5 et 13.

Le nombre cherché est par conséquent 65 et le carré parfait obtenu est 38 025.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(806; 754) = 26$, donc on obtient :

$$\frac{806 \div 26}{754 \div 26} = \frac{31}{29}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 806 et 754, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{44 \times 29}{806 \times 29} + \frac{11 \times 31}{754 \times 31} = \frac{1\,276}{23\,374} + \frac{341}{23\,374} = \frac{1\,617}{23\,374}.$$