A. P. M. E. P.

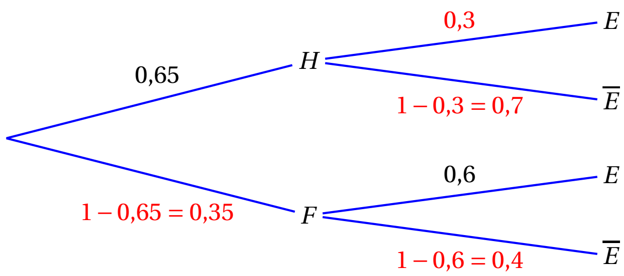
Baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion
13 septembre 2013
Corrigé

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est :



2. **a.** L'événement $E \cap F$ est « la personne choisie écoute les explications du démarcheur et est une femme. ».
D'après les propriétés de l'arbre pondéré :
$P(E \cap F) = P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

b. La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est $P(E)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(E) = P(H \cap E) + P(F \cap E) = P(H) \times P_H(E) + P(F) \times P_F(E)$
$= 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,6 = 0,195 + 0,21 = 0,405$

c. Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute ; la probabilité que ce soit un homme est $P_E(H)$.
$P_E(H) = \dfrac{P(E \cap H)}{P(E)} = \dfrac{0,65 \times 0,3}{0,405} \approx 0,48$

Partie B

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Les relevés réalisés au cours des premières journées permettent de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait, donc la probabilité qu'une personne interrogée souscrive un nouveau forfait est 0,12.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
La variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.

2. La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est $P(X = 5)$.
Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n, p)$ on sait que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donc $P(X = 5) = \dbinom{60}{5} 0,12^5 (1 - 0,12)^{60-5} \approx 0,120$

3. La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geqslant 1)$.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.
   $P(X=0) = \binom{60}{0} 0{,}12^0 \left(1-0{,}12\right)^{60-0} \approx 0{,}000\,5$; donc $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}999\,5$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire – L

Remarque : on ne demandait pas de justification dans cet exercice.

1. Réponse **c.**
   Sur l'intervalle $]1\,;3[$ la courbe est située au dessus de toutes ses tangentes.
2. Réponse **d.**
   Par lecture graphique, on voit que l'ordonnée à l'origine de la droite D est 5, et que son coefficient directeur est -3.
3. Réponse **b.**
   Sur $]1\,;2[$, la fonction f est convexe donc $f''(x) > 0$ donc f' est croissante.
4. Réponse **b.**
   Comme la fonction f est positive sur $[0\,;2]$, le nombre $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$; en comptant les carreaux, on voit que cette aire est comprise entre 3 et 6.
5. Réponse **b.**
   Prenons a et b tels que $-1 < a < b < 2$; on sait que $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Sur l'intervalle $]-1\,;\,2[$ la fonction f est positive et $a < b$, donc l'intégrale est positive. On déduit que $F(b) - F(a) > 0$ ce qui équivaut à $F(a) < F(b)$ donc la fonction F est croissante sur $]-1\,;\,2[$.

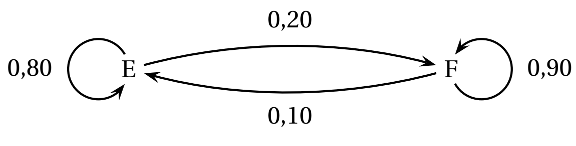
EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

PARTIE A

1. Sachant qu'on désigne par E (étranger) et F (France) les deux sommets, le graphe probabiliste associé à la situation décrite dans le texte est :



2. La matrice de transition M associée fait passer de l'état n à l'état $n+1$:
   $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} e_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_n & l_n \end{pmatrix} \times M$.
   D'après le graphe, on peut dire que : $\begin{cases} e_{n+1} &= 0{,}8\,e_n + 0{,}1\,l_n \\ l_{n+1} &= 0{,}2\,e_n + 0{,}9\,l_n \end{cases}$
   donc la matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3. $2011 = 2008 + 3$ donc pour 2011, n correspond à 3 ; on cherche e_3.
$P_1 = P_0 \times M$; $P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M \times M = P_0 \times M^2$;
$P_3 = P_2 \times M = P_0 \times M^2 \times M = P_0 \times M^3$.
À la calculatrice, on trouve $P_3 = \begin{pmatrix}0,30475 & 0,69525\end{pmatrix}$ donc $e_3 = 0,30475$; on peut en déduire que, en 2008, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est 30,475 %.

4. L'état stable correspond à la matrice ligne $\begin{pmatrix}e & l\end{pmatrix}$ telle que
$\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}e & l\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix}e & l\end{pmatrix}\\ e + l = 1\end{array}\right.$

$\begin{pmatrix}e & l\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix}e & l\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l}0,8\,e + 0,1\,l = e\\ 0,2\,e + 0,9\,l = l\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}-0,2\,e + 0,1\,l = 0\\ 0,2\,e - 0,1\,l = 0\end{array}\right. \iff$
$0,2\,e = 0,1\,l \iff 2\,e = l$

$\left\{\begin{array}{l}2\,e = l\\ e + l = 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}2\,e = l\\ e + 2\,e = 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}l = \frac{2}{3}\\ e = \frac{1}{3}\end{array}\right.$

L'état stable est $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.
Cela signifie qu'à long terme, un tiers des étudiants partent travailler à l'étranger tandis que deux tiers restent travailler en France.

PARTIE B

1. On cherche un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule, c'est-à-dire une chaîne eulérienne du graphe proposé dans le texte.
On sait qu'il existe une chaîne eulérienne dans un graphe convexe si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Ce graphe a 4 sommets de degré impair : B (de degré 3), C (de degré 3), D (de degré 5) et G (de degré 3).
Donc il n'y a pas de trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule.

2. On applique l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin reliant A à G :

A	B	C	D	E	F	G	on garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
	16	∞	30	∞	∞	∞	B(A)
		∞	~~52~~ 30	∞	56	∞	D(A)
		62		59	56	90	F(B)
		~~83~~ 62		~~86~~ 59		~~90~~ 84	E(F)
		~~74~~ 62				~~92~~ 84	C(E)
						84	G(F)

Le trajet le plus rapide reliant A à G est donc : A $\xrightarrow{16}$ B $\xrightarrow{40}$ F $\xrightarrow{28}$ G
Il a une durée de $16 + 40 + 28 = 84$ minutes soit 1 heure et 24 minutes.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10\,;\,30]$ par $f(x) = 5 + x\mathrm{e}^{0,2x-1}$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-10\,;\,30]$:
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{0,2x-1} + x \times 0,2 \times \mathrm{e}^{0,2x-1} = (0,2x+1)\,\mathrm{e}^{0,2x-1}$

2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{0,2x-1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2x+1$.
$0,2x+1 > 0 \iff 0,2x > -1 \iff x > \dfrac{-1}{0,2} \iff x > -5$
Donc la fonction f est :
   - strictement décroissante sur $[-10\,;\,-5]$
   - strictement croissante sur $[-5\,;\,30]$

3. $f(0) = 5$ et $f(20) \approx 406,7 > 80$
La fonction f est strictement croissante sur $[-5\,;\,30]$ donc sur $[0\,;\,20] \subset [-5\,;\,30]$.
On établit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,20]$:

x	0		α		20
$f(x)$	5	$\nearrow$	80	$\nearrow$	406,7

Donc l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,20]$.
$\left.\begin{array}{l} f(13) \approx 69,4 < 80 \\ f(14) \approx 89,7 > 80 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13\,;\,14]\,;\ \left.\begin{array}{l} f(13,5) \approx 78,9 < 80 \\ f(13,6) \approx 80,9 > 80 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,5\,;\,13,6]$

4. Soit F la fonction définie sur $[-10\,;\,30]$ par $F(x) = 5(x-5)\mathrm{e}^{0,2x-1} + 5x$.
On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10\,;\,30]$.

   a. D'après le cours : $I = \displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = F(10) - F(5)$
   $F(10) = 5(10-5)\,\mathrm{e}^{0,2\times 10-1} + 5\times 10 = 25\mathrm{e} + 50\,;$
   $F(5) = 5(5-5)\,\mathrm{e}^{0,2\times 5-1} + 5\times 5 = 25$
   Donc $I = (25\mathrm{e} + 50) - 25 = 25\mathrm{e} + 25$

   b. La valeur moyenne de la fonction f entre 5 et 10 est
   $\dfrac{1}{10-5}\displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}I.$
   Donc la valeur moyenne vaut : $\dfrac{25\mathrm{e}+25}{5} = 5\mathrm{e} + 5 \approx 18,59.$

PARTIE B

1. $f(0) = 5$ correspond au nombre de magasins existant en $2010+0$, c'est-à-dire en 2010.

2. La fonction f est strictement croissante sur $[0;20]$ et $f(\alpha) = 80$; donc si $x > \alpha$, alors $f(x) > 80$.
Or $\alpha \approx 13,5$, donc à partir de $x = 14$, $f(x)$ est supérieur à 80.
La chaîne possèdera 80 boutiques à partir de l'année $2010 + 14$ soit 2024.

3. Les années 2015 et 2020 correspondent à $x = 5$ et $x = 10$; dans l'intervalle $[5\,;\,10]$ on a vu que la valeur moyenne de la fonction f était de 18,59 ce qui veut dire qu'on peut estimer que la chaîne possédait en moyenne 18,59 magasins par an sur cette période.

Chaque magasin est ouvert 300 jours par an et a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 €, le chiffre d'affaires annuel moyen peut être estimé à :

$18{,}59 \times 300 \times 2500 = 13\,942\,500$ €

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Le nombre d'exposants en 2013 est u_1.
   On prend 90 % de $u_0 = 110$, ce qui donne 99 et on ajoute 30, ce qui donne 129. Le nombre d'exposants attendus en 2013 est 129.
2. Pour déterminer u_{n+1}, on prend 90 % de u_n ; prendre 90 % revient à multiplier par 0,9. Puis on ajoute 30 au résultat, ce qui donne $0{,}9\,u_n + 30$.
   Donc, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 30$.
3. On complète l'algorithme pour qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'exposants dépasse 220 :

Variables :	u est un nombre réel n est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à u la valeur 110 Affecter à n la valeur 2012

Traitement :	Tant que $u < 220$
	  Affecter à u la valeur $0{,}9\,u + 30$
	  Affecter à n la valeur $n + 1$

Sortie :	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.
   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}9\,u_n + 30 - 300 = 0{,}9\,u_n - 270$
   $v_n = u_n - 300 \iff u_n = v_n + 300$
   Donc $v_{n+1} = 0{,}9\,(v_n + 300) - 270 = 0{,}9\,v_n + 270 - 270 = 0{,}9\,v_n$
   $v_0 = u_0 - 300 = 110 - 300 = -190$
   On a donc démontré que la suite (v_n) était géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -190$.
   b. D'après le cours, on peut en déduire que, pour tout n :
   $v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0{,}9^n$.
   Or $u_n = v_n + 300$ donc, pour tout n, $u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300$.
   c. L'algorithme permet de déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n > 220$.
   On résout donc l'inéquation $u_n > 220$:
   $$u_n > 220 \iff -190 \times 0{,}9^n + 300 > 220 \iff 80 > 190 \times 0{,}9^n$$
   $$\iff \frac{80}{190} > 0{,}9^n \qquad \iff \ln\left(\frac{80}{190}\right) > \ln\left(0{,}9^n\right)$$
   $$\iff \ln\left(\frac{80}{190}\right) > n\ln(0{,}9) \qquad \iff \frac{\ln\left(\frac{80}{190}\right)}{\ln(0{,}9)} < n$$
   Dans cette succession d'équivalences, on a utilisé le fait que la fonction ln *était strictement croissante, puis le fait que* $\ln(0{,}9)$ *était négatif ce qui faisait changer le sens de l'inégalité quand on a divisé par* $\ln(0{,}9)$.
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{80}{190}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 8{,}2$ donc le résultat recherché par l'algorithme est $n = 9$.
   À la calculatrice, on trouve $u_8 \approx 218{,}2$ *et* $u_9 \approx 226{,}4$.

5. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 ; or $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

Comme pour tout n, $u_n = v_n + 300$, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 300.

De plus, en calculant quelques termes de la suite (u_n), on peut conjecturer que cette suite est croissante.

La suite (u_n) est croissante et admet pour limite 300, donc tous ses termes sont inférieurs à 300.

L'organisateur a donc raison de dire au maire qu'avec 300 emplacements, il aura assez de place pour ne pas refuser d'inscriptions.