Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Sud

17 novembre 2014

Exercice 1 — 5 points

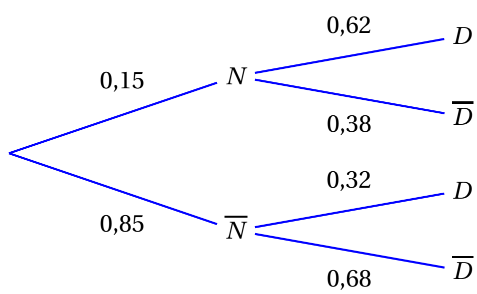
Commun à tous les candidats

Une bibliothèque municipale dispose pour ses usagers de deux types de livres : les livres à support numérique et les livres à support papier.

Le service des prêts observe que 85 % des livres empruntés sont à support papier.
Un livre est rendu dans les délais s'il est rendu dans les quinze jours suivant son emprunt.
Une étude statistique montre que 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais et que 32 % des livres à support papier sont rendus dans les délais.

Un lecteur, choisi au hasard, emprunte un livre de cette bibliothèque. On note :
- N l'évènement : « le livre a un support numérique » ;
- D l'évènement : « le livre est rendu dans les délais ».

On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



1. **a.** 0,62
   Le résultat est donné dans le texte : « 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais » donc $P_N(D) = 0,62$.
2. **c.** 0,578
   $P\left(\overline{N} \cap \overline{D}\right) = 0,85 \times 0,68 = 0,578$
3. **b.** 0,365
   $P(D) = P(N \cap D) + P(\overline{N} \cap D) = 0,15 \times 0,62 + 0,85 \times 0,32 = 0,093 + 0,272 = 0,365$
4. On appelle X la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$.
   4.1 Réponse **d.** 0,992
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,62)^5 \approx 0,992$
   4.2 Réponse **a.** 3,1
   L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ est $np = 5 \times 0,62 = 3,1$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~4]$ par $f(x) = (3x - 4)\,\mathrm{e}^{-x} + 2$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   La fonction f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.
   Pour tout x de $[0~;~4]$: $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x} + (3x - 4)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (3 - 3x + 4)\,\mathrm{e}^{-x} = (7 - 3x)\,\mathrm{e}^{-x}$

2. $f'(x) = (7-3x)\,\text{e}^{-x}$; or, pour tout x, $\text{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $7-3x$, donc s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{7}{3}$.

On calcule : $f(0) = -2$; $f\left(\dfrac{7}{3}\right) = 3\,\text{e}^{-\frac{7}{3}} + 2$ et $f(4) = 8\,\text{e}^{-4} + 2$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$3\,\text{e}^{-\frac{7}{3}}+2$	$\searrow$	$8\,\text{e}^{-4}+2$

3. a. $f(0) = -2 < 0$; $f\left(\dfrac{7}{3}\right) = 3\,\text{e}^{-\frac{7}{3}} + 2 > 0$ et $f(4) = 8\,\text{e}^{-4} + 2 > 0$ donc on peut compléter le tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		$\frac{7}{3}$		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3\,\text{e}^{-\frac{7}{3}}+2$	$\searrow$	$8\,\text{e}^{-4}+2$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0;4]$ et que cette solution est dans l'intervalle $\left[0;\dfrac{7}{3}\right]$.

b. $\left.\begin{array}{l} f(0,3) \approx -0,3 < 0 \\ f(0,4) \approx 0,12 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [0,3;0,4]$ et $\left.\begin{array}{l} f(0,36) \approx -0,04 < 0 \\ f(0,37) \approx 0,004 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [0,36;0,37]$

Donc $0,36$ est une valeur approchée de α à $0,01$ près.

On peut également utiliser le `solveur` *de la calculatrice qui donne pour valeur approchée de* α *le nombre* $0,369$ *; on prendra alors* $0,37$ *comme valeur approchée à 0,01 près.*

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $F(x) = (1-3x)\,\text{e}^{-x} + 2x$

a. Pour montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$, on dérive la fonction F :
$F'(x) = -3\,\text{e}^{-x} + (1-3x)(-1)\,\text{e}^{-x} + 2 = (-3-1+3x)\,\text{e}^{-x} + 2 = (3x-4)\,\text{e}^{-x} + 2 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.

b. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\text{d}t$

Donc la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$ est $\dfrac{1}{4-0}\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\text{d}t$ et comme F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$, cette valeur moyenne vaut $\dfrac{1}{4}\big(F(4)-F(0)\big)$.

$F(4) = 8 - 11\,\text{e}^{-4}$, $F(0) = 1$, donc $F(4) - F(0) = 7 - 11\,\text{e}^{-4}$ et donc la valeur moyenne de f sur $[0;4]$ est égale à $\dfrac{7-11\,\text{e}^{-4}}{4} \approx 1,70$.

5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x) = (3x-10)\,\text{e}^{-x}$.

a. L'intervalle sur lequel la fonction f est convexe est l'intervalle sur lequel la dérivée seconde f'' est positive ou nulle.

$f''(x) = (3x-10)\,\text{e}^{-x}$; or $\text{e}^{-x} > 0$ pour tout x donc f'' est du signe de $3x-10$.

$3x - 10 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 10 \iff x \geqslant \dfrac{10}{3} \iff x \in \left[\dfrac{10}{3};4\right]$

La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\dfrac{10}{3}\,;4\right]$.

b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule donc pour $x = \dfrac{10}{3}$.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.

Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2 % chaque semaine pour les éditions suivantes.
L'agence souhaite dépasser les 4 000 journaux vendus par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1\,200$.

1. 2 % de 1 200 correspondent à $\dfrac{2}{100} \times 1200 = 24$; donc $u_1 = 1\,200 + 24 = 1\,224$.

2. Ajouter 2 % c'est multiplier par 1,02 ; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = 1\,200$.
Donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1\,200 \times 1,02^n$.

3. Le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500 quand $u_n > 1\,500$; on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n > 1\,500 &\iff 1\,200 \times 1,02^n > 1\,500\\
&\iff 1,02^n > \frac{1\,500}{1\,200}\\
&\iff 1,02^n > 1,25\\
&\iff \ln\left(1,02^n\right) > \ln 1,25 && \text{(croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[)\\
&\iff n \times \ln 1,02 > \ln 1,25 && \text{(propriété de la fonction ln)}\\
&\iff n > \frac{\ln 1,25}{\ln 1,02} && (\ln 1,02 > 0)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 1,25}{\ln 1,02} \approx 11,3$ donc c'est à partir de 12 semaines que le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500.

4. Voici un algorithme :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 1 200
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 4\,000$
	N prend la valeur $N+1$
	U prend la valeur $1,02 \times U$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

a. La valeur de N affichée par cet algorithme est la première valeur pour laquelle U est supérieur ou égal à 4 000.
Dans cet algorithme, U correspond au nombre de journaux vendus la semaine N, autrement dit correspond à u_N.
On résout donc dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_N \geqslant 4\,000$:

$$u_N \geqslant 4\,000 \iff 1\,200 \times 1,02^N \geqslant 4\,000 \iff 1,02^N \geqslant \frac{4\,000}{1\,200} \iff 1,02^N \geqslant \frac{10}{3}$$

$$\iff \ln\left(1,02^N\right) \geqslant \ln\frac{10}{3} \iff N \times \ln 1,02 \geqslant \ln\frac{10}{3} \iff N \geqslant \frac{\ln\frac{10}{3}}{\ln 1,02}$$

Or $\dfrac{\ln \frac{10}{3}}{\ln 1,02} \approx 60,8$ donc la valeur de N affichée par l'algorithme est 61.

b. C'est à partir de la semaine 61 que le nombre de journaux vendus par semaine sera supérieur à 4 000.

On peut vérifier que $u_{60} \approx 3\,937 < 4\,000$ *et que* $u_{61} \approx 4\,015 > 4\,000$.

5. a. D'après le cours, pour tout réel $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Donc :

$$1 + 1,02 + \cdots + 1,02^n = \dfrac{1-1,02^{n+1}}{1-1,02} = \dfrac{1,02^{n+1}-1}{0,02} = \dfrac{1}{0,02} \times \left(1,02^{n+1}-1\right) = 50 \times \left(1,02^{n+1}-1\right)$$

b. On pose, pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Donc :

$S_n = 1\,200 + 1\,200 \times 1,02 + \cdots + 1\,200 \times 1,02^n = 1\,200\left(1 + 1,02 + 1,02^2 + \cdots + 1,02^n\right)$
$\quad = 1\,200 \times 50 \times \left(1,02^{n+1}-1\right) = 60\,000\left(1,02^{n+1}-1\right)$

c. Le nombre total de journaux vendus au bout de 52 semaines est S_{52} c'est-à-dire
$60\,000 \times \left(1,02^{53}-1\right) \approx 111\,380$.

Exercice 3 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

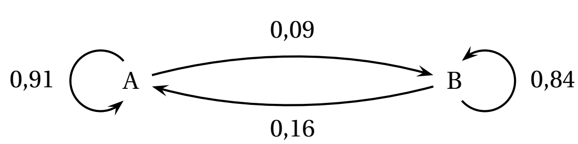
La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année. Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.
Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.
Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.
Ainsi 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout n, $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$.

1. On traduit la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. D'après le cours, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 \\ 0,16 & 0,84 \end{pmatrix}$

3. a. $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 \\ 0,16 & 0,84 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 0,91a_n + 0,16b_n \\ b_{n+1} = 0,09a_n + 0,84b_n \end{array} \right.$

donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,91a_n + 0,16b_n$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,91a_n + 0,16b_n$; or, pour tout n, $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0,91a_n + 0,16(1-a_n) \iff a_{n+1} = 0,75a_n + 0,16$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. La probabilité à 0,001 près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4 est $a_4 \approx 0,471$.

On sait que $a_1 = 0,24$ *et la calculatrice donne successivement* $a_2 = 0,75 \times 0,24 + 0,16 = 0,34$ *;*
$a_3 = 0,75 \times 0,34 + 0,16 = 0,415$ *et* $a_4 = 0,75 \times 0,415 + 0,16 = 0,471\,25 \approx 0,471$.

5. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des employés.

a. L'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ vérifie le système $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times M \\ a + b = 1 \end{array} \right.$

b. $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \times M \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0,91a+0,16b \\ b = 0,09a+0,84b \end{array}\right. \iff 0.09a = 0,16b$

$\left\{\begin{array}{c} 0,09a = 0,16b \\ a+b=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 0,09(1-b) = 0,16b \\ a+b=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 0,09 = 0,25b \\ a=1-b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0,64 \\ b=0,36 \end{array}\right.$

Donc l'état stable est $P = \begin{pmatrix}0,64 & 0,36\end{pmatrix}$

c. Si on laisse s'exprimer les employés au fil des semaines, le pourcentage d'employés favorables au logo A va tendre vers 64 %, et le pourcentage de ceux favorables au logo B va tendre vers 36 %.

6. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,24$
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $A < 0,639$
	N prend la valeur $N+1$
	A prend la valeur $0,75 \times A + 0,16$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Dans cet algorithme, la variable A représente le pourcentage d'employés favorables au logo A, et la variable N désigne le numéro de la semaine ; donc N représente n et A représente a_n.

Cet algorithme permet de trouver la plus petite valeur de n pour laquelle a_n est supérieur ou égal à 0,639, autrement dit pour laquelle le pourcentage d'employés favorables au logo A est supérieur ou égal à 63,9 %.

Exercice 4 5 points

Commun à tous les candidats

Dans un atelier de confiserie, une machine remplit des boîtes de berlingots après avoir mélangé différents arômes.

Partie 1

On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque boîte prélevée au hasard, associe sa masse (en gramme) est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 9$.

1. a. À la calculatrice, on trouve : $P(485 \leqslant X \leqslant 515) \approx 0,904$

b. L'atelier proposera à la vente les boîtes dont la masse est comprise entre 485 g et 515 g.

La production est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

Donc le nombre de boîtes dont la masse est comprise entre 485 g et 515 g suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,904$; l'espérance mathématique de cette loi est $np = 500 \times 0,904 = 452$.

Le nombre moyen de boîtes qui seront proposées à la vente dam un échantillon de 500 boîtes prélevées au hasard est 452.

2. On trouve à la calculatrice que la probabilité que la masse X soit supérieure ou égale à 490 g est $P(X \geqslant 490) \approx 0,867$.

3. a. On cherche à la calculatrice, à déterminer à l'unité près l'entier m tel que $p(X \leqslant m) = 0,01$.

On trouve : $P(X \leqslant 478) \approx 0,007$; $P(X \leqslant 479) \approx 0,0098$ et $P(X \leqslant 480) \approx 0,013$.

Donc $m = 479$ et $P(X \leqslant 479) \approx 0,01$.

b. On peut donc dire que la probabilité que la masse d'une boîte soit inférieure ou égale à 479 grammes est égale à 0,01, ou encore que le pourcentage de boîtes dont la masse est inférieure ou égale à 479 g est de 1 %.

Partie 2

La machine est conçue pour que le mélange de berlingots comporte 25 % de berlingots parfumés à l'anis. On prélève 400 berlingots au hasard dans le mélange et on constate que 84 sont parfumés à l'anis.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 400$ et $p = 0,25$ donc l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des berlingots parfumés à l'anis est :

$$I = \left[0,25 - 1,96\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{400}}\,;\, 0,25 + 1,96\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{400}}\right] \approx [0,207\,;\, 0,293]$$

2. La fréquence f des berlingots parfumés à l'anis dans l'échantillon prélevé est $\dfrac{84}{400} = 0,21$.

3. Comme $f \in I$, on peut estimer, au seuil de confiance de 95 %, que la machine est bien réglée.