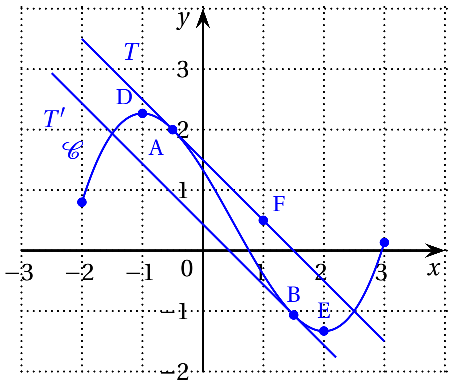
☙ Corrigé du baccalauréat ES/L ❧
Métropole - La Réunion – 12 septembre 2017

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$. On note f' la fonction dérivée de cette fonction sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$.



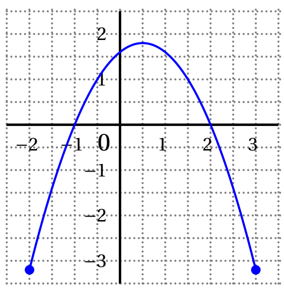
On dispose des renseignements suivants :

- T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A $(-0,5\,;\,2)$, elle passe par le point F $(1\,;\,0,5)$.
- T' est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse $\frac{3}{2}$.
- Les droites T et T' sont parallèles.
- Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points D d'abscisse -1 et E d'abscisse 2 sont parallèles à l'axe des abscisses.

Affirmation 1.
Les nombres $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ sont tous deux égaux à -1.

Explications
La tangente T passe par A et par F donc elle a pour coefficient directeur $\dfrac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \dfrac{0,5-2}{1-(-0,5)} = -1$.
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$, donc au point A ; c'est donc le coefficient directeur de la tangente T. Donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.
$f'\left(\frac{3}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$, donc au point B ; c'est donc le coefficient directeur de la tangente T'. Les droites T et T' sont parallèles donc elles ont même coefficient directeur ; on en déduit que $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.
Affirmation 1. vraie

Affirmation 2.
La courbe ci-contre représente la fonction f' sur $[-2\,;\,3]$.



Explications
La courbe ci-contre représente une fonction qui est négative sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ ce qui voudrait dire que la fonction f est décroissante sur cet intervalle ; d'après le tracé de $\mathscr{C}$, c'est faux.
La courbe n'est donc pas la représentation graphique de f'.
Affirmation 2. fausse

Affirmation 3.
La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$.

Explications
Une fonction est concave sur un intervalle si sa courbe représentative est située en dessous des tangentes en tous les points de cet intervalle. La courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la tangente T' au point B donc la fonction f n'est pas concave sur $[-2\,;\,3]$.
Affirmation 3. fausse

Affirmation 4.
Sur $[-2\,;\,0]$, toute primitive de f est croissante.

Explications
Toute primitive de la fonction f a pour dérivée f donc son sens de variation est donné par le signe de la fonction f. Sur $[-2\,;\,0]$, la fonction f est positive, donc toute primitive est croissante sur cet intervalle.
Affirmation 4. vraie

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Partie A

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.
Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide.
Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

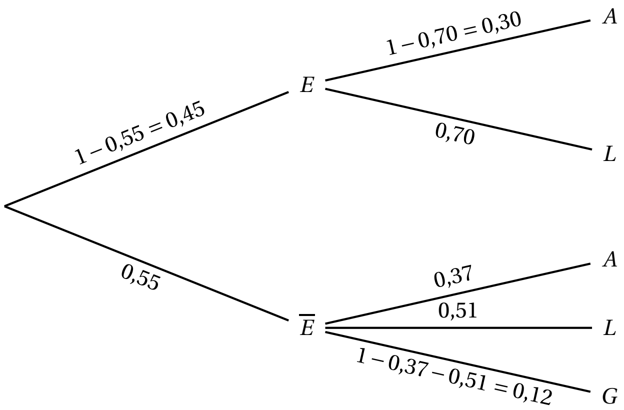
Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.
On considère les événements suivants :

- E : « le billet a été acheté en ligne »;
- A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide »;
- L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide »;
- G : « le billet correspond à une visite de groupe ».

1. On complète l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



2. La probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à $p(E \cap A) = 0,45 \times 0,30 = 0,135$.
3. D'après la formule des probabilités totales : $p(A) = p(E \cap A) + p(\overline{E} \cap A) = 0,135 + 0,55 \times 0,37 = 0,338\,5$.
4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. La probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée est : $p_A(\overline{E}) = \dfrac{p(A \cap \overline{E})}{p(A)} = \dfrac{0,55 \times 0,37}{0,338\,5} \approx 0,601$.

Partie B

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

1. À la calculatrice, on trouve : $p(90 \leqslant D \leqslant 120) \approx 0,477$.
   On peut donc considérer qu'il y a environ 47,7 % de personnes qui mettent entre 90 et 120 minutes, c'est-à-dire entre 1h30 et 2h, pour leur visite.
2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes (soit 150 minutes) par visite.
   $p(D \geqslant 150) \approx 3,169 \times 10^{-5}$ donc il y a moins de 2 % des visiteurs qui restent plus de 2h30 par visite. Le directeur ne changera donc rien à la capacité d'accueil de l'espace restauration.

Partie C

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère. Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.

La proportion d'étrangers est $p = 0,22$ et on prend un échantillon de taille $n = 2000$. Or $n \geqslant 30$, $np = 440 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 1560 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'étrangers parmi les visiteurs :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,22 - 1,96\frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{2000}}\ ;\ 0,22 + 1,96\frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{2000}}\right]$$
$$\approx [0,202\ ;\ 0,238].$$

Dans le musée étudié, il y a eu 490 visiteurs étrangers donc la fréquence est $f = \dfrac{490}{2000} = 0,245$.
Ce nombre n'appartient pas à l'intervalle I donc on peut penser, au risque de 5 %, que le nombre de visiteurs étrangers est anormalement élevé dans ce musée.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans cet exercice, on étudie le tirage moyen journalier des quotidiens français d'information générale et politique, c'est-à-dire le nombre moyen d'exemplaires imprimés par jour.
Le tableau suivant donne, entre 2007 et 2014, pour chaque année ce tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Tirage moyen journalier en milliers d'exemplaires	10 982	10 596	10 274	10 197	10 182	9 793	9 321	8 854

Source : D.G.M.I.C (Direction générale des médias et des industries culturelles)

1. Le taux d'évolution du tirage moyen journalier entre 2007 et 2008 est $\dfrac{10596-10982}{10982}\times 100 \approx -3{,}51\,\%$.

   Pour tout entier naturel n, on note V_n le tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires, de l'année $(2007+n)$.
   Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = 10982$ et, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}96V_n + 100$.

2. $V_1 = 0{,}96V_0 + 100 = 0{,}96\times 10982 + 100 = 10642{,}72$ et
   $V_2 = 0{,}96V_1 + 100 = 0{,}96\times 10642{,}72 + 100 \approx 10317{,}01$

3. Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n - 2500$ donc $V_n = W_n + 2500$.

   a. $W_{n+1} = V_{n+1} - 2500 = 0{,}96V_n + 100 - 2500 = 0{,}96\,(W_n + 2500) - 2400 = 0{,}96W_n + 2400 - 2400$
   $= 0{,}96W_n$
   $W_0 = V_0 - 2500 = 10982 - 2500 = 8482$
   Donc la suite (W_n) est géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $W_0 = 8482$.

   b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $W_n = W_0 \times q^n = 8482 \times 0{,}96^n$.

   c. Pour tout n, $V_n = W_n + 2500$ donc $V_n = 8482 \times 0{,}96^n + 2500$.

4. **a.** L'année 2007 correspond à $n = 0$ donc l'année 2017 correspond à $n = 10$.
   Le tirage moyen journalier prévu selon ce modèle pour l'année 2017 est
   $V_{10} = 8482 \times 0{,}96^{10} + 2500 \approx 8139{,}11$ milliers d'exemplaires.

   b. La suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$; or $-1 < q < 1$ donc la suite (W_n) admet le nombre 0 pour limite.
   On en déduit que la suite (V_n) a pour limite 2 500 ce qui veut dire que le nombre d'exemplaires vendus va tendre vers 2 500 milliers.

   c. L'algorithme suivant affiche le tirage moyen journalier, à partir de 2007 jusqu'à l'année $(2007+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur :

```
Variables
        V est un réel
        n et k sont des entiers
Initialisation
        Saisir la valeur de n
        V prend la valeur 10982
Traitement et affichage
        Pour k variant de 1 à n
                V prend la valeur 0,96 × V + 100
                Afficher V
        Fin Pour
```

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical.
En 2013, 20 % des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70 % des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20 % des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.
Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- $E_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

Ainsi, on a $E_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

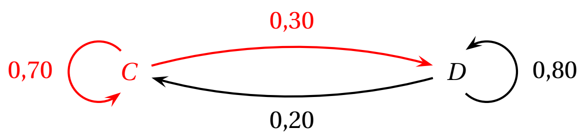
On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. On note :

- C l'état « l'enfant est inscrit aux cours d'éveil musical »
- D l'état « l'enfant n'est pas inscrit aux cours d'éveil musical »

On traduit la situation par un graphe probabiliste :



2. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} c_{n+1} & = & 0,7\,c_n + 0,2\,d_n \\ d_{n+1} & = & 0,3\,c_n + 0,8\,d_n \end{array}\right.$

Ce qui s'écrit : $\begin{pmatrix} c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ ou encore $E_{n+1} = E_n \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matrice de transition est donc $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

3. $E_1 = E_0 \times A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,2 & 0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

$E_2 = E_0 \times A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,2 & 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$

4. L'état probabiliste stable est l'état $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ tel que $c + d = 1$ et $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \times A$.

$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \times A \iff \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7c + 0,2d & 0,3c + 0,8d \end{pmatrix}$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0,7\,c + 0,2\,d \\ d & = & 0,3\,c + 0,8\,d \end{array}\right. \iff 0 = -0,3c + 0,2d \iff -3c + 2d = 0$

On résout le système :

$\left\{\begin{array}{rcl} -3c + 2d & = & 0 \\ c + d & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3c + 2d & = & 0 \\ 3c + 3d & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5d & = & 3 \\ c & = & 1 - d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0,4 \\ d & = & 0,6 \end{array}\right.$

L'état stable est l'état limite du système donc si le processus se poursuit, le pourcentage d'enfants inscrits aux cours d'éveil musical va tendre vers 40 % et le pourcentage de ceux qui n'assistent pas à ce cours va tendre vers 60 %.

Partie B

1. On a vu que, pour tout n, $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2d_n$; or $c_n + d_n = 1$ donc $d_n = 1 - c_n$ ce qui entraîne $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2(1 - c_n)$ ou encore $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2 - 0{,}2c_n$ ou enfin $c_{n+1} = 0{,}5c_n + 0{,}2$.

On admet pour la suite de l'exercice que tout entier naturel n, $c_n = -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$.

2. Pour tout n :

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \left(-0{,}2 \times 0{,}5^{n+1} + 0{,}4\right) - \left(-0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4\right) = -0{,}2 \times 0{,}5^{n+1} + 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}5^n - 0{,}4 \\ &= 0{,}2 \times 0{,}5^n(-0{,}5 + 1) = 0{,}2 \times 0{,}5^{n+1} > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (c_n) est croissante.

3. **a.** Voici un algorithme affichant la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical à partir de 2013 jusqu'à l'année $(2013 + n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur :

```
Variables
        C est un réel
        n et k sont des entiers
Initialisation
        Saisir la valeur de n
        C prend la valeur 0,2
Traitement et affichage
        Pour k variant de 1 à n
                C prend la valeur 0,5 × C + 0,2
                Afficher C
        Fin Pour
```

b. La proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical franchira le seuil de 39 % si on peut trouver n tel que $c_n > 0{,}39$.

On a vu que la limite du pourcentage d'enfants suivant les cours d'éveil musical était 0,40 donc le nombre n tel que $c_n > 0{,}39$ va exister. De plus, comme la suite (c_n) est croissante, si on trouve n_0 tel que $c_{n_0} > 0{,}39$, on aura $c_n > 0{,}39$ pour tout $n > n_0$.

On résout l'inéquation $c_n > 0{,}39$:

$$c_n > 0{,}39 \iff -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4 > 0{,}39 \iff 0{,}5^n < \frac{0{,}39 - 0{,}4}{-0{,}2} \iff 0{,}5^n < 0{,}05$$

$$\iff \ln\left(0{,}5^n\right) < \ln(0{,}05) \iff n \times \ln(0{,}5) < \ln(0{,}05) \iff n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}5)}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}5)} \approx 4{,}32$ donc $c_n > 0{,}39$ à partir de $n = 5$.

4. Le directeur de cette école affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical dépassera le seuil de 50 %.

La suite (c_n) est croissante et a pour limite 0,4 donc, pour tout n, $c_n \leqslant 0{,}4$. La proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical ne peut dépasser 40 % donc le directeur a tort.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 euros.

On note x le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte.

Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel x de l'intervalle $[3~;~10]$, si le prix de vente d'une enceinte est x centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}25x+5}.$$

Ainsi, $f(x)$ est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de x centaines d'euros. Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par $f(4)$.

1. Une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros est $f(4) \approx 55$.
2. Le coût de production est de 300 euros donc la marge brute de cette entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte est $55 \times (400-300) = 5\,500$.

   On note $g(x)$ la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour un prix de vente de x centaines d'euros par enceinte.
3. On appelle $g(x)$ la marge brute pour un prix de vente de x centaines d'euros par enceinte ; le coût de production est de 300 euros, soit 3 centaines d'euros. La vente d'une enceinte rapporte donc $(x-3)$ centaines d'euros.

   Pour un prix de vente de x centaines d'euros, le nombre d'acheteurs est estimé à $f(x)$.

   La marge brute est donc : $g(x) = (x-3) \times f(x) = (x-3)\,\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
4. **a.** D'après le logiciel de calcul formel, $g'(x) = -\dfrac{x-7}{4}\,\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.

   Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,25x+5} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-\dfrac{x-7}{4}$.

   Le tableau suivant donne le signe de $g'(x)$ en fonction de x sur l'intervalle $[3\,;\,10]$:

x	3	7	10
$x-7$	$-$	0	$+$
$-\dfrac{x-7}{4}$	$+$	0	$-$
$\mathrm{e}^{-0,25x+5}$	$+$		$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

   Donc la fonction g
   - est strictement croissante sur l'intervalle $[3\,;\,7]$;
   - est strictement décroissante sur l'intervalle $[7\,;\,10]$;
   - admet un maximum pour $x = 7$.

   b. D'après la question précédente, l'entreprise réalisera la marge brute maximale pour $x = 7$; cette marge maximale sera alors de $g(7) \approx 103,16$ centaines d'euros soit 10 316 euros.
5. Soit G la fonction telle que $G(x) = (-4x-4)\,\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ pour tout réel x de $[3\,;\,10]$.

   a. $G'(x) = (-4)\times \mathrm{e}^{-0,25x+5} + (-4x-4)\times(-0,25)\,\mathrm{e}^{-0,25x+5} = (-4+x+1)\,\mathrm{e}^{-0,25x+5} = (x-3)\,\mathrm{e}^{-0,25x+5} = g(x)$ donc G est une primitive de g sur $[3\,;\,10]$.

   b. $I = \displaystyle\int_3^{10} g(x)\,\mathrm{d}x = G(10) - G(3) = \left(-44\,\mathrm{e}^{2,5}\right) - \left(-16\,\mathrm{e}^{4,25}\right) = 16\,\mathrm{e}^{4,25} - 44\,\mathrm{e}^{2,5}$