

## Baccalauréat S Centres étrangers 12 juin 2013

### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A

1. La durée de vie moyenne d'une vanne est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $T$ .

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0002} = 5000 \text{ (h)}.$$

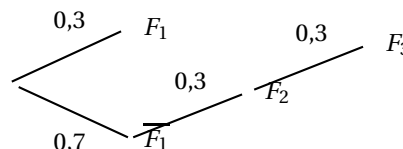
2. On calcule  $p(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{-6000 \times 0,0002} = e^{-1,2} \approx 0,301$ .

#### Partie B

1.

2. On a  $P(E) = P(F_1) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) =$   
 $P(E) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,3 + 0,063 = 0,363$ .

3. Il faut calculer  $P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)} = \frac{0,3}{0,363} \approx$   
 $0,8264 \approx 0,826$  (au millième).



#### Partie C

1. Les conditions :

- $n = 400 \geq 30$ ;
- $np = 8 > 5$ ;
- $n(1-p) = 392 > 5$

sont bien réalisées. Dans ces conditions on sait que l'intervalle de fluctuation à 95 % est égal à :

$$I_{400} = \left[ 0,02 - 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} ; 0,02 + 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} \right] = [0,00628 ; 0,03372]$$

2. La fréquence observée est égale à  $\frac{10}{400} = 0,025$  et  $0,0025 \in I_{400}$ .

L'affirmation de l'industriel ne peut être remise en cause.

#### Partie D

1. La calculatrice permet de trouver :

$$P(760 \leq D \leq 840) \approx 0,683.$$

2.  $P(D \leq 880) = \frac{1}{2} + P(800 \leq D \leq 880) \approx 0,5 + 0,477 \approx 0,977$ .

3. On a  $P(D > 880) = 1 - P(D \leq 880) \approx 0,023$  soit à peu près 2,3 %, soit beaucoup plus que 1 %. L'industriel a tort.

### Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

#### Affirmation 1

Un vecteur normal au plan  $P$  a pour coordonnées  $(2 ; 1 ; -2)$ .

Un vecteur normal au plan dont une équation est  $2x + y + 2z - 24 = 0$  a pour coordonnées  $(2 ; 1 ; 2)$  : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

Affirmation fausse.

#### Affirmation 2

Pour  $t = -1$  on trouve les coordonnées de A et pour  $t = 3$  celles de C.

Affirmation vraie.

**Affirmation 3**

La droite (DE) a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{DE}$  (5 ; -4 ; 3) et on a vu que  $\vec{u}$  (2 ; 1 ; -2) est un vecteur normal au plan P.

Or  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{DE} = 10 - 4 - 6 = 0$ , donc la droite (DE) est parallèle au plan P. Comme les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P ( $4 + 7 + 12 - 5 = 0$  est une égalité fautive, la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).

**Affirmation 4**

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

$$\text{On a : } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

D'où  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -60 + 60 = 0$  : les vecteurs sont orthogonaux ;

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = -60 + 60 = 0$  : les vecteurs sont orthogonaux.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur  $\overrightarrow{DE}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc orthogonal à ce plan.

Affirmation vraie.

**Exercice 3**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

1. a. Soit G la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $G(x) = x - e^{-x}$  est dérivable sur cet intervalle et  $G'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x}$  : c'est donc une primitive de g.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x) dx = [G(x)]_0^a = [x - e^{-x}]_0^a = a - e^{-a} - (0 - e^{-0}) = a + 1 - e^{-a}.$$

b.  $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x) dx = [G(x)]_a^1 = [x - e^{-x}]_a^1 = 1 - e^{-1} - (a - e^{-a}) = 1 - a + e^{-a} - e^{-1}.$

2. a. Somme de fonctions dérivables sur  $[0; 1]$ , f est dérivable sur cet intervalle et :

$$f'(x) = 2 + 2e^{-x}$$

Les deux termes de cette somme sont positifs, donc sur  $[0; 1]$ ,  $f'(x) > 0$  et la fonction f est croissante sur  $[0; 1]$  de  $f(0) = -2 + \frac{1}{e} \approx -1,63$  à  $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{1}{e} \approx 1,63$ .

D'où le tableau de variation :

x	0	1
f'(x)	+	
f(x)	$\frac{1}{e} - 2$	$2 - \frac{1}{e}$

- b. Sur  $[0; 1]$ , f croît de  $f(0) \approx -1,6$  à  $f(1) \approx 1,6$ . Comme elle est croissante et continue elle s'annule une seule fois sur l'intervalle  $[0; 1]$  pour un réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La calculatrice permet de trouver que :

$$0,4 < \alpha < 0,5, \text{ puis } 0,45 < \alpha < 0,46 \text{ et enfin } 0,452 < \alpha < 0,453.$$

Donc  $\alpha \approx 0,45$  au centième près.

3. On a :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff a + 1 - e^{-a} = 1 - a + e^{-a} - e^{-1} \iff 2a - e^{-a} + e^{-1} = 0, \text{ ce qui signifie que } a \text{ est une solution de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur } [0; 1].$$

On a vu que cette solution est égale à  $\alpha$ .

Finalement les aires sont égales pour  $a = \alpha \approx 0,45$ .

**Partie B**

1. On a  $g(0) = 1 + 1 = 2$ . Il est donc évident que l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  est inférieure à  $2 \times 1 = 2$ .  
Comme  $g(1) = 1 + e^{-1}$ , si  $b \geq 1 + e^{-1}$  chacune des deux aires serait supérieure à 1 ce qui est impossible. Donc  $b < 1 + \frac{1}{e}$ .

2. L'aire du domaine du bas est égale à  $b \times 1 = b$  qui est égale à la demi-aire de  $\mathcal{D}$ .

On a donc :

$$b = \frac{1}{2} \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} [G(x)]_0^1 = \frac{1}{2} [x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2} [1 - e^{-1} + e^0].$$

$$\text{Finalement } b = \frac{1}{2} (2 - e^{-1}) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} \approx 0,816.$$

**Exercice 4****5 points****Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique****Partie A - Algorithmique et conjectures**

- Affecter à  $u$  la valeur  $\frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$   
Affecter à  $n$  la valeur  $n + 1$ .
- Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable  $u$  ».
- La suite  $(u_n)$  semble être décroissante vers 0.

**Partie B - Étude mathématique**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{n \times u_n + 1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{n \times u_n - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n$ .

Cette relation montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme

$$v_0 = 1 \times u_1 - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. On a donc pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$ .

$$\text{Or } v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{1 + 0,5^n}{n}.$$

3. Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ , et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0,5)^n}{n} = \frac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}.$$

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n < 0, \text{ ce qui démontre que la suite } (u_n) \text{ est décroissante (vers zéro).}$$

**Partie C - Retour à l'algorithmique**

Variables	$n$ est un entier naturel $u$ est un réel
Initialisation	Affecter à $n$ la valeur 1 Affecter à $u$ la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0,001$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable $n$

**Exercice 4****5 points****Candidats ayant choisi la spécialité mathématique****Partie A - Algorithmique et conjectures**

- Tant que  $i < n$  faire
  - Affecter à  $i$  la valeur  $i + 1$
  - Afficher  $i$
  - Affecter à  $c$  la valeur  $(0,8a + 0,3b)$
  - Afficher  $c$
  - Affecter à  $b$  la valeur  $(0,2a + 0,7b)$
  - Afficher  $b$
  - Affecter à  $a$  la valeur  $c$
- Fin du Tant que
- Au vu de ces résultats, la suite  $(a_n)$  semble décroître vers 18 et la suite  $(b_n)$  semble croître vers 12.

**Partie B - Étude mathématique**

- $a_n$  et  $b_n$  étant les nombres respectifs d'oiseaux présents sur les îles A et B au début de l'année  $203 + n$ , on a l'année suivante :
  - sur l'île A, 80 % des oiseaux de l'île A de l'année précédente et 30 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :
 
$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n,$$
  - sur l'île B, 20 % des oiseaux de l'île A de l'année précédente et 70 % des oiseaux de l'île B de l'année précédente, soit :
 
$$b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n.$$
  - Donc avec  $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ , on a bien  $U_{n+1} = MU_n$ .
- Initialisation :**

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^1 & 0,6 - 0,6 \times 0,5^1 \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^1 & 0,4 + 0,6 \times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M.$$
 La propriété est vraie au rang 1.
 

**Hérédité :** on suppose que pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $M^p = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^p & 0,6 - 0,6 \times 0,5^p \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^p & 0,4 + 0,6 \times 0,5^p \end{pmatrix}$ .

 Alors  $M^{p+1} = M \times M^p = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^p & 0,6 - 0,6 \times 0,5^p \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^p & 0,4 + 0,6 \times 0,5^p \end{pmatrix}$ .
 

Le premier coefficient de cette matrice est :
 
$$0,8 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^p) + 0,3 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^p) = 0,48 + 0,32 \times 0,5^p + 0,12 - 0,2 \times 0,5^p = 0,6 + 0,2 \times 0,5^p = 0,6 + (0,4 \times 0,5) \times 0,5^p = 0,6 + 0,4 \times 0,5^{p+1}.$$

 On démontrerait de la même façon que :
 
$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^{p+1} & 0,6 - 0,6 \times 0,5^{p+1} \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^{p+1} & 0,4 + 0,6 \times 0,5^{p+1} \end{pmatrix}.$$
 La propriété est donc vraie au rang  $p + 1$ .
 

La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire à partir du rang 1 : d'après le principe de récurrence elle est donc vraie quel que soit le naturel  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .
- Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .
- On admet donc que pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ,  $U_n = M^n U_0$  soit :
 
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) \\ 20(0,4 - 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,4 + 0,6 \times 0,5^n) \end{pmatrix}.$$
 Finalement quel que soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  :
 
$$a_n = 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) = 12 + 8 \times 0,5^n + 6 - 6 \times 0,5^n = 18 + 2 \times 0,5^n.$$

Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ . Il s'ensuit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 0,5^n = 0$  et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 18.$$

Au bout de quelques années la population sur l'île A va se rapprocher de 18 millions (au bout de 10 ans :  $\approx 18,002$ )