

## Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud

22 novembre 2016

### EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

5 points

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$ .

On considère les points  $A(0,5; 1)$  et  $B(0; -1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On sait que  $O$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  et que la droite  $(OA)$  est tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $O$ .

1. On suppose que la fonction  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

On sait que le point  $O$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  donc  $f(0) = 0$  ce qui équivaut à  $(0 + b)e^0 = 0$  ou encore  $b = 0$ .

Donc  $f(x)$  s'écrit  $f(x) = axe^{-x^2}$ .

La droite  $(OA)$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $O$ , et elle a pour coefficient directeur 2, donc  $f'(0) = 2$ .

$f(x) = axe^{-x^2}$  donc  $f'(x) = a \times e^{-x^2} + ax \times (-2x)e^{-x^2} = (a - 2ax^2)e^{-x^2}$ .

$f'(0) = 2 \iff (a - 0)e^0 = 2 \iff a = 2$ ; donc  $f(x) = 2xe^{-x^2}$ .

Désormais, on considère que  $f(x) = 2xe^{-x^2}$  pour tout  $x$  appartenant à  $cd0; +\infty[$

2. a. On admettra que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \text{on pose } X = x^2 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et on a déjà vu que  $f(x) = (a - 2ax^2)e^{-x^2} = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$  puisque  $a = 2$ .

Pour tout  $x$ ,  $e^{-x^2} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $2 - 4x^2$  c'est-à-dire de  $4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$ .

Sur  $[0; +\infty[$ , la dérivée s'annule et change de signe pour  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,86$ .

On dresse le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ :

$x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)$	+	0	+
$\frac{\sqrt{2}}{2} - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$0 \xrightarrow{\quad} \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\quad} 0$		

3. La fonction  $g$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  passe par le point  $B(0; -1)$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

a. On sait que la dérivée de  $x \mapsto e^{u(x)}$  est  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ , donc une primitive de  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  est  $x \mapsto e^{u(x)}$ .

Donc la fonction  $x \mapsto -2xe^{-x^2}$  a pour primitive la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  donc une primitive de la fonction  $f$  est  $g$  définie par  $g(x) = -e^{-x^2} + k$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

$\mathcal{C}_g$  contient le point  $B(0; -1)$ , donc  $g(0) = -1$ , ce qui équivaut à  $-e^0 + k = -1$  donc  $k = 0$ .

La primitive de  $f$  dont la courbe représentative passe par le point  $B$  est donc la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = -e^{-x^2}$ .

b. Soit  $m$  un réel strictement positif.

$$I_m = \int_0^m f(t) dt = g(m) - g(0) = -e^{-m^2} - (-1) = 1 - e^{-m^2}$$

c. On cherche  $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m$  :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow +\infty} -m^2 = -\infty \\ \text{on pose } M = -m^2 \\ \lim_{M \rightarrow -\infty} \frac{X}{e^M} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-m^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - e^{-m^2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 1.$$

4. a. La fonction  $f$  est

- continue sur  $I$
- positive sur  $I$
- telle que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m f(t) dt = 1$

donc la fonction  $f$  est une fonction de densité de probabilité sur  $[0; +\infty[$ .

b. Soit  $X$  une variable aléatoire continue qui admet la fonction  $f$  comme densité de probabilité.

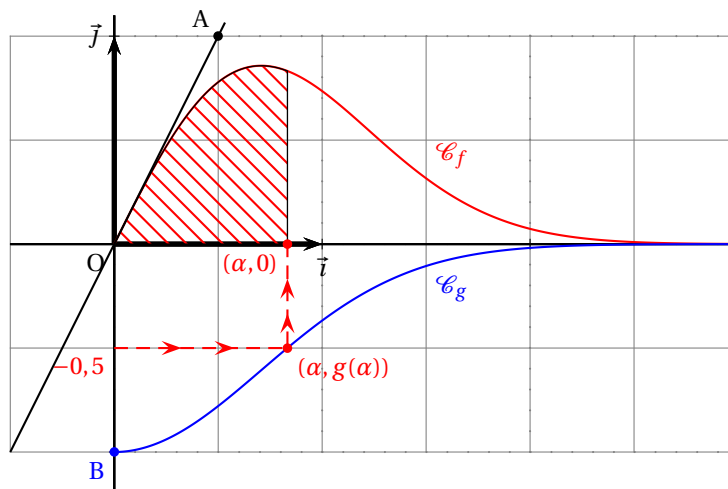
Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = g(x) - g(0)$ .

Or  $g(0) = -e^0 = -1$ , donc  $P(X \leq x) = g(x) + 1$ .

c. Soit  $\alpha$  le réel tel que  $P(X \leq \alpha) = 0,5$ .

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) = 0,5 &\Leftrightarrow g(\alpha) + 1 = 0,5 \Leftrightarrow g(\alpha) = -0,5 \\ &\Leftrightarrow -e^{-\alpha^2} = -0,5 \Leftrightarrow -\alpha^2 = \ln 0,5 \\ &\Leftrightarrow -\alpha^2 = -\ln 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\ln 2} \text{ car } \alpha > 0 \end{aligned}$$

d. On construit le point de coordonnées  $(\alpha; 0)$  et on hachure la région du plan correspondant à  $P(X \leq \alpha)$  :



**EXERCICE 2****Commun à tous les candidats****3 points**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

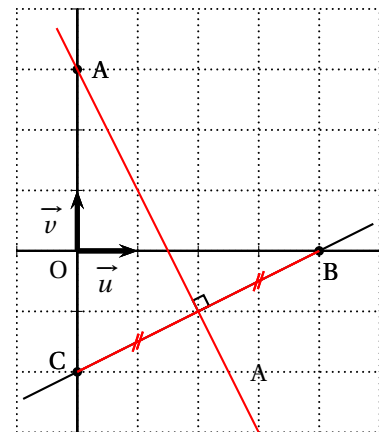
**Proposition 1**

L'ensemble des points du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z-4| = |z+2i|$  est une droite qui passe par le point A d'affixe  $3i$ .

**Proposition vraie**

- Soit B le point d'affixe  $b = 4$  et C le point d'affixe  $c = -2i$ ; on appelle M le point d'affixe  $z$ .  
 $|z-4| = |z+2i| \iff |z-b| = |z-c| \iff MB = MC$   
 Donc l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z-4| = |z+2i|$  est la médiatrice  $\Delta$  du segment [BC].
- On appelle  $a$  l'affixe du point A.  
 $AB = |b-a| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$   
 $AC = |c-a| = |-2i-3i| = |-5i| = 5$   
 Donc le point A est à égale distance de B et de C; il appartient donc à la droite  $\Delta$ , médiatrice de [BC].

L'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z-4| = |z+2i|$  est donc la droite médiatrice du segment [BC] et cette droite passe par le point A d'affixe  $3i$ .

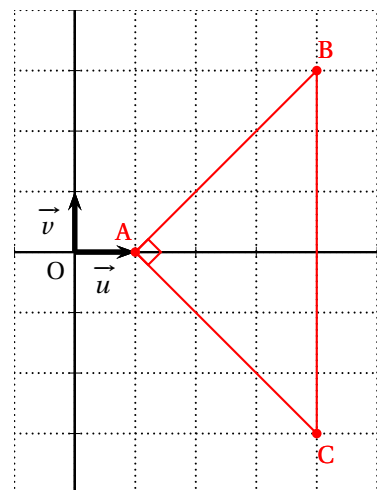
**Proposition 2**

Soit (E) l'équation  $(z-1)(z^2-8z+25) = 0$  où  $z$  appartient à l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans  $\mathbf{C}$  de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

**Proposition vraie**

- L'équation  $z-1 = 0$  a pour solution le nombre  $a = 1$  affixe d'un point appelé A.
- On résout dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $z^2-8z+25 = 0$ ;  $\Delta = 64 - 100 = -36$  donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées  $b = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$  et  $c = 4-3i$ .  
 Ces deux nombres complexes  $b$  et  $c$  sont les affixes de deux points qu'on appelle B et C.
- L'équation (E) a donc trois solutions qui sont les affixes des trois points A, B et C.
- $AB^2 = |b-a|^2 = |4+3i-1|^2 = |3+3i|^2 = 9+9 = 18$   
 $AC^2 = |c-a|^2 = |4-3i-1|^2 = |3-3i|^2 = 9+9 = 18$   
 $BC^2 = |c-b|^2 = |4-3i-4-3i|^2 = |-6i|^2 = 36$
- $18 + 18 = 36$  donc  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Donc les points du plan dont les affixes sont les solutions dans  $\mathbf{C}$  de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

**Proposition 3**

$\frac{\pi}{3}$  est un argument du nombre complexe  $(-\sqrt{3} + i)^8$ .

**Proposition fautive**

Soit  $z$  le nombre complexe  $-\sqrt{3} + i$  ; on cherche  $\theta$  un argument de  $z$ .

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

On cherche donc  $\theta$  tel que  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ; un argument de  $z$  est donc  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

D'après le cours, un argument de  $z^8$  est  $8\theta = \frac{40\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

Les nombres  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$  ne sont pas congrus modulo  $2\pi$  donc la proposition est fautive.

**EXERCICE 3****Commun à tous les candidats****3 points**

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ .

1. a. On calcule les premiers termes de la suite  $(u_n)$  :

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

On peut conjecturer que, pour tout  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

- **Initialisation**

Pour  $n=0$ ,  $u_n = u_0 = 0$  et  $\frac{n}{n+1} = \frac{0}{1} = 0$ .

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

Soit  $n$  un entier naturel quelconque.

On suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n = \frac{n}{n+1}$  (hypothèse de récurrence).

On va démontrer que la propriété est vraie au rang  $n+1$ , c'est à dire  $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1) - n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

La propriété est donc vraie au rang  $n+1$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ .

- **Conclusion**

On a vérifié que la propriété était vraie au rang 0.

On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout  $n$ .

Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

- b. Pour tout  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

D'après le cours :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ .

On peut donc en déduire que la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  est égale à 1.

2. On complète l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$  :

<b>Variables :</b>	$n, a$ et $b$ sont des nombres.
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $a$ prend la valeur 0 $b$ prend la valeur 0,5
<b>Traitement :</b>	Tant que $ b - a  > 10^{-3}$ $n$ prend la valeur $n + 1$ $a$ prend la valeur $b$ $b$ prend la valeur $\frac{1}{2 - b}$
<b>Sortie :</b>	Fin Tant que Afficher $n$

#### Explications

Pour  $n$  donné,  $a$  joue le rôle de  $u_n$  et  $b$  celui de  $u_{n+1}$ .

Si l'objectif  $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$  n'est pas atteint, on passe au rang  $n + 1$  : on remplace  $u_n$  par  $u_{n+1}$ , c'est-à-dire  $a$  par  $b$ , et on remplace  $u_{n+1}$  par  $u_{n+2}$ , c'est-à-dire  $b$  par  $\frac{1}{2 - b}$ .

## EXERCICE 4

### Commun à tous les candidats

4 points

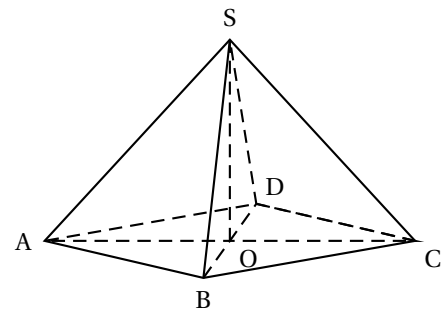
#### Partie A : Un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.

On note O le centre du carré ABCD.

On admettra que  $OS = OA$ .



1. On sait que O est le centre du carré ABCD donc  $OA = OC$ .

On sait que la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc  $SA = SC$ .

On se place dans le triangle SAC.

$SA = SC$  donc le triangle SAC est isocèle.

$OA = OC$  donc O est le milieu de  $[AC]$  et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice ; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

En se plaçant dans le triangle (SBD), on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule  $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$ .

- La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.  
Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore,  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  ce qui équivaut à  $2AB^2 = 24^2$  ou  $AB^2 = 288$ .  
L'aire du carré ABCD est  $AB^2 = 288 \text{ cm}^2$ .
- D'après le texte,  $SO = OA$  donc  $SO = \frac{24}{2} = 12$ .

Le volume de la pyramide est donc  $V = \frac{288 \times 12}{3} = 1152 \text{ cm}^3$ .

### Partie B : Dans un repère

On considère le repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$ .

On peut donc dire que les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives  $(0; 0; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$  et  $(0; 0; 1)$ .

Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives  $(-1; 0; 0)$  et  $(0; -1; 0)$ .

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

Donc P et Q ont pour coordonnées respectives  $(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$  et  $(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .

a. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(1; 1; -3)$ .

- Le vecteur  $\overrightarrow{PC}$  a pour coordonnées  $(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2})$ .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{PC}.$$

- Le vecteur  $\overrightarrow{QC}$  a pour coordonnées  $(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QC} = 1 \times (-1) + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{QC}.$$

- Les vecteurs  $\overrightarrow{PC}$  et  $\overrightarrow{QC}$  ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs  $\overrightarrow{PC}$  et  $\overrightarrow{QC}$  non colinéaires, donc il est normal au plan (QPC).

b. Le plan (QPC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{CM}$  soient orthogonaux.

Si M a pour coordonnées  $(x; y; z)$ , le vecteur  $\overrightarrow{CM}$  a pour coordonnées  $(x+1; y; z)$ .

$$\overrightarrow{CM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 1 \times (x+1) + 1 \times y - 3 \times z = 0 \iff x + y - 3z + 1 = 0$$

Le plan (PQC) a pour équation  $x + y - 3z + 1 = 0$ .

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

a. La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{n}$  qui est normal au plan (PQC).

La droite (SH) contient le point S de coordonnées  $(0; 0; 1)$ .

La droite (SH) a donc pour représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbf{R}$$

b.  $H \in (SH) \cap (PQC)$  donc les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{cases} x & = & k \\ y & = & k \\ z & = & 1-3k \\ x+y-3z+1 & = & 0 \end{cases}$$

On a donc  $k+k-3(1-3k)+1=0 \iff 11k=2 \iff k=\frac{2}{11}$ .

$$1-3k=1-3 \times \frac{2}{11}=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$$

Les coordonnées de H sont donc  $\left(\frac{2}{11}; \frac{2}{11}; \frac{5}{11}\right)$ .

c.  $SH^2 = \left(\frac{2}{11}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{11}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{11}-1\right)^2 = \frac{4}{11^2} + \frac{4}{11^2} + \frac{36}{11^2} = \frac{44}{11^2}$  donc  $SH = \frac{\sqrt{44}}{11} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ .

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à  $\frac{3\sqrt{11}}{8}$

La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH ; son volume est donc

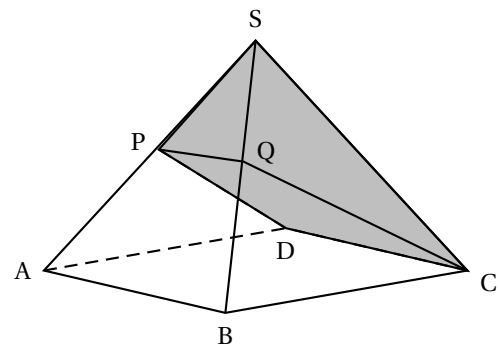
$$V' = \frac{SH \times \text{aire}(PQCD)}{3} = \frac{\frac{2\sqrt{11}}{11} \times \frac{3\sqrt{11}}{8}}{3} = \frac{\frac{6}{8}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4} \text{ unité de volume.}$$

### Partie C : Partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

Dans le repère de la partie B, la longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut  $12^3 = 1728 \text{ cm}^3$ .

Le volume de la pyramide SABCD est égal à  $1152 \text{ cm}^3$ .

Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit  $0,25 \times 1728 = 432 \text{ cm}^3$ .

Or  $\frac{1152}{2} = 576 \neq 432$  donc le partage proposé par Fanny n'est pas équitable.

**EXERCICE 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points**

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

**Partie A : Étude des pannes du module mécanique**

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire  $D$  qui suit une loi normale d'espérance  $\mu = 50$  et d'écart-type  $\sigma$ .

1. Le service statistique indique que  $P(D \geq 48) = 0,7977$  ce qui veut dire que  $P(D < 48) = 1 - 0,7977 = 0,2023$ .

$$D < 48 \iff D - 50 < -2 \iff \frac{D - 50}{\sigma} < -\frac{2}{\sigma}$$

D'après le cours, si  $D$  suit la loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , alors la variable aléatoire  $Z = \frac{D - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

On cherche donc le réel  $\beta$  tel que  $P(Z < \beta) = 0,2023$  sachant que  $Z$  suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, on trouve  $\beta \approx -0,8334340$  donc  $\sigma \approx -\frac{2}{-0,8334340} \approx 2,3997$ .

**Pour la suite de cet exercice, on prendra  $\sigma = 2,4$ .**

2. La probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois est  $P(45 \leq D \leq 52)$ .

On trouve à la calculatrice 0,7791 comme valeur arrondie à  $10^{-4}$  de la probabilité cherchée.

3. La probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est  $P_{(D \geq 48)}(D \geq 48 + 6)$  :

$$P_{(D \geq 48)}(D \geq 54) = \frac{P((D \geq 54) \cap (D \geq 48))}{P(D \geq 48)}$$

$$P((D \geq 54) \cap (D \geq 48)) = P(D \geq 54) \approx 0,04779 \text{ et } P(D \geq 48) \approx 0,79767$$

$$P_{(D \geq 48)}(D \geq 54) \approx \frac{0,04779}{0,79767} \approx 0,0599$$

La valeur approchée à  $10^{-4}$  de la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est 0,0599.

**Partie B : Étude des pannes d'origine électronique**

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :  $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ -e^{-\lambda t} \right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ .

1. Le service statistique indique que  $P(0 \leq T \leq 24) = 0,03$  donc  $\lambda$  vérifie l'égalité  $\int_0^{24} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0,03$  ou encore  $1 - e^{-24\lambda} = 0,03$ . On résout cette équation d'inconnue  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-24\lambda} = 0,03 &\iff 0,97 = e^{-24\lambda} \\ &\iff \ln(0,97) = -24\lambda \\ &\iff -\frac{\ln(0,97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$

La valeur de  $\lambda$  telle que  $P(0 \leq T \leq 24) = 0,03$  est  $\lambda = -\frac{\ln(0,97)}{24}$ .



Pour la suite de cet exercice, on prendra  $\lambda = 0,00127$ .

$$2. P(24 \leq T \leq 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0,0291$$

La valeur approchée à  $10^{-4}$  de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.

$$3. \quad \text{a.} \quad \bullet P(T \leq b) = 1 - e^{-b\lambda} \implies P(T \geq b) = 1 - P(T \leq b) = 1 - (1 - e^{-b\lambda}) = e^{-b\lambda}$$

$$\bullet h > 0 \implies (T \geq t+h) \cap (T \geq t) = (T \geq t+h)$$

$$P_{T \geq t}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-(t+h)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = \frac{e^{-t\lambda} \times e^{-h\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-h\lambda}$$

$$= P(T \geq h)$$

Donc la variable aléatoire  $T$  est sans vieillissement.

b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est  $P_{T \geq 36}(T \geq 36 + 12)$  qui est égal à  $P(T \geq 12)$  d'après la question précédente.

$$P(T \geq 12) = e^{-12\lambda} \approx 0,9849$$

La valeur approchée à  $10^{-4}$  de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,9849.

### Partie C : Panne d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements  $(D \geq 48)$  et  $(T \geq 48)$  sont indépendants donc

$$P((D \geq 48) \cap (T \geq 48)) = P(D \geq 48) \times P(T \geq 48).$$

La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est

$$P((D \geq 48) \cap (T \geq 48)) = P(D \geq 48) \times P(T \geq 48) = 0,7977 \times e^{-48\lambda} \approx 0,7505$$

### Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

$$P(D \geq 48) = 0,7977 \text{ donc } p = 0,7977$$

$n = 300 \geq 30$ ;  $np = 239,31 \geq 5$  et  $n(1-p) = 60,69 \geq 5$  donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[ 0,7977 - 1,96 \frac{\sqrt{0,7977(1-0,7977)}}{\sqrt{300}} ; 0,7977 + 1,96 \frac{\sqrt{0,7977(1-0,7977)}}{\sqrt{300}} \right]$$

$$\approx [0,7522 ; 0,8432]$$

La fréquence de climatiseurs ayant encore leur module mécanique en fonctionnement après 4 ans (ou 48 mois) est  $f = \frac{246}{300} = 0,82$ .

Or  $f \in I$  donc il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.

**EXERCICE 5****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****5 points**

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel  $p$  non nul, on note  $N_p$  le rep-unit s'écrivant avec  $p$  fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots 1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

**Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers**

1. Le chiffre des unités de  $N_p$  est 1 donc  $N_p$  est impair donc il n'est pas divisible par 2.  
Et comme le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5, le nombre  $N_p$  n'est pas divisible par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de  $N_p$  par 3.
  - a.  $10 = 3 \times 3 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$  et donc, pour tout  $j \in \mathbf{N}$ ,  $10^j \equiv 1^j \pmod{3}$  donc  $10^j \equiv 1 \pmod{3}$ .
  - b.  $N_p$  est la somme de  $p$  termes de la forme  $10^j$  avec  $j \in \mathbf{N}$ , et pour tout  $j \in \mathbf{N}$ ,  $10^j \equiv 1 \pmod{3}$ .  
Donc  $N_p \equiv p \pmod{3}$ .
  - c. On peut donc dire que  $N_p$  est divisible par 3 si et seulement si  $p$  est divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de  $N_p$  par 7.
  - a. On complète le tableau de congruences ci-dessous, où  $a$  est l'unique entier relatif appartenant à  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  tel que  $10^m \equiv a \pmod{7}$  :

$m$	0	1	2	3	4	5	6
$a$	1	3	2	-1	-3	-2	1

- b. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
La division euclidienne de  $p$  par 6 permet d'écrire  $p = 6q + r$  avec  $q \in \mathbf{N}$  et  $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .  
 $10^p = 10^{6q+r} = 10^{6q} \times 10^r = (10^6)^q \times 10^r$   
Or d'après la question précédente,  $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $(10^6)^q \equiv 1^q \pmod{7}$  et donc  $10^{6q} \equiv 1 \pmod{7}$ .  
On en déduit que  $10^p \equiv 10^r \pmod{7}$ .
  - Si  $p$  est un multiple de 6, alors  $r = 0$  et  $10^r = 10^0 \equiv 1 \pmod{7}$ . Donc  $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ .
  - Si  $p$  vérifie  $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ , alors  $10^r \equiv 1 \pmod{7}$  où  $r$  est le reste de la division de  $p$  par 6.  
D'après le tableau de la question précédente, la seule valeur possible de  $r$  dans  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  pour que  $10^r \equiv 1 \pmod{7}$  est  $r = 0$ . On en déduit que  $p$  est un multiple de 6.
 On a donc démontré que  $10^p \equiv 1 \pmod{7}$  si et seulement si  $p$  est un multiple de 6.
- c.  $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{p-1}$  est la somme des  $p$  premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.  
Donc  $N_p = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 1 \times \frac{1 - 10^p}{1 - 10} = \frac{10^p - 1}{9}$ .
- d.
  - Si 7 divise  $N_p$ , alors 7 divise tout multiple de  $N_p$  donc 7 divise  $9N_p$ .
  - On suppose que 7 divise  $9N_p$ .  
On sait que 7 et 9 sont premiers entre eux; donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise  $N_p$ .  
On a démontré que « 7 divise  $N_p$  » est équivalent à « 7 divise  $9N_p$  ».

- e. On a vu dans une question précédente que  $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$  ce qui équivaut à  $9N_p = 10^p - 1$ .
- $$N_p \text{ est divisible par } 7 \iff 9N_p \text{ est divisible par } 7 \quad (\text{question d.})$$
- $$\iff 9N_p \equiv 0 \pmod{7}$$
- $$\iff 10^p - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$
- $$\iff 10^p \equiv 1 \pmod{7}$$
- $$\iff p \text{ est multiple de } 6 \quad (\text{question b.})$$

**Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait**

1. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de  $n^2$  se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire  $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$ .

- a. On complète le tableau de congruences ci-dessous :

$n \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

- b. D'après le tableau de la question précédente, pour avoir  $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$  il faut

- soit  $n \equiv 1 \pmod{10}$  donc  $n = 10m + 1$  avec  $m \in \mathbf{N}$ ;
- soit  $n \equiv 9 \pmod{10}$  donc  $n = 10m' + 9$  ou  $n = 10m - 1$  avec  $m \in \mathbf{N}$ .

- c. • Si  $n = 10m + 1$ , alors  $n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20(5m^2 + m) + 1 \equiv 1 \pmod{20}$ ;  
 • Si  $n = 10m - 1$ , alors  $n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20(5m^2 - m) + 1 \equiv 1 \pmod{20}$ .

2. Soit  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On sait que  $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$ .

Pour tout  $k \geq 2$ ,  $10^k = 100 \times 10^{k-2} = 20(5 \times 10^{k-2}) \equiv 0 \pmod{20}$ . Donc  $\sum_{k \geq 2} 10^k \equiv 0 \pmod{20}$ .

Donc  $N_p \equiv 1 + 10 \pmod{20}$  c'est-à-dire  $N_p \equiv 11 \pmod{20}$ .

3. On a vu que  $n^2 \equiv 1 \pmod{10} \implies n^2 \equiv 1 \pmod{20}$ ; donc tout nombre qui a pour reste 1 dans la division par 10 et qui est un carré parfait, a pour reste 1 dans la division par 20.

Le nombre  $N_p$  a pour reste 1 dans la division par 10 et pour reste 11 dans la division par 20.

Donc  $N_p$  ne peut pas être le carré d'un entier.