Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud ∾
8 novembre 2019

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A :

1. L'espérance (ici la durée de vie moyenne) est égale à l'inverse du paramètre :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0555} \approx 18,02 \approx 18 \text{ (mois)}.$$

2. La probabilité que la durée de vie du chronomètre soit comprise entre 12 et 24 mois est égale à :

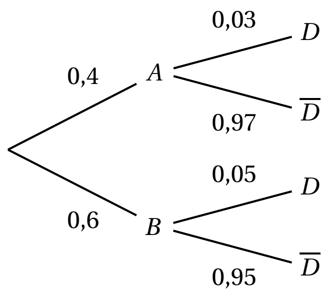
$$P(12 \leqslant T \leqslant 24) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 12} - \mathrm{e}^{-\lambda\times 24} = \mathrm{e}^{-0,0555\times 12} - \mathrm{e}^{-0,0555\times 24} \approx 0,5138 - 0,2640 \approx 0,250.$$

La probabilité que la durée de vie du chronographe sit comprise entre 12 et 24 mois est égale à 0,25 à 10^{-3} près.

3. La probabilité que le chronomètre fonctionne 12 mois de plus est $\mathrm{e}^{-0,05555\times 12} \approx 0,5138$, soit 0,514 à 10^{-3} près.

Partie B :

1. a. On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



La probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux est égale à :

$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,4 \times 0,03 = 0,012$.

b. On calcule de même la probabilité que le roulement provienne du fournisseur B et soit défectueux :

$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0,6 \times 0,05 = 0,030$.

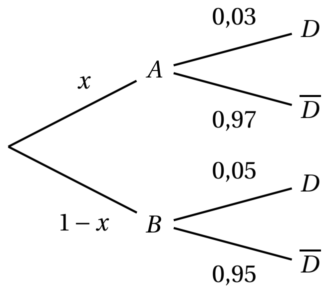
D'après la loi des probabilités totales, on a :

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,012 + 0,030 = 0,042$.

Donc la probabilité que le roulement défectueux provienne du fournisseur B est égale à :

$P_D(B) = \dfrac{P(D \cap B)}{P(D)} = \dfrac{0,030}{0,042} = \dfrac{30}{42} = \dfrac{5}{7} \approx 0,7142$, soit 0,714 à 10^{-3} près.

2. Soit x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ la proportion de roulements commandés au fournisseur A ; l'arbre de probabilités devient :



La probabilité d'avoir un roulement défectueux est alors égale à :
$p(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}03x + 0{,}05(1 - x) = 0{,}03x + 0{,}05 - 0{,}05x = 0{,}05 - 0{,}02x$. On veut que cette probabilité soit inférieur à 0,035, d'où l'inéquation :
$p(D) < 0{,}035 \iff 0{,}05 - 0{,}02x < 0{,}035 \iff 0{,}05 - 0{,}035 < 0{,}02x \iff 0{,}015 < 0{,}02x$, d'où en multipliant par 50 :
$0{,}75 < x$: il faut donc se fournir chez A à plus de 75 %.

Partie C :

1. Avec une moyenne de 8 mm et un écart type σ de 0,1, la probabilité qu'un roulement soit conforme est :
$P(7{,}8 \leqslant X \leqslant 8{,}2) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$: ce résultat est dans le cours : 0,95. On peut le retrouver à la calculatrice.
2. Le président a acheté $30 \times 16 = 480$ roulements.
On a donc $n = 480$ et une probabilité d'avoir un roulement défectueux de $p = 0{,}05$.
Comme $n > 30$, $np = 480 \times 0{,}05 = 24 > 5$ et $n(1 - p) = 480 \times 0{,}95 = 46 > 5$, on peut chercher un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \approx [0{,}0305\ ;\ 0{,}0695].$$
Dans le contrôle on a trouvé 38 roulements non conformes sur 480, soit une proportion de $\dfrac{38}{480} \approx 0{,}079$.
Comme $0{,}079 \neq [0{,}0305\ ;\ 0{,}0695]$,le président peut remettre en cause l'affirmation du fournisseur B.
3. **a.** La loi suivie par $X' = \dfrac{X-8}{\sigma}$ est une loi normale centrée réduite.
b. On a $7{,}8 \leqslant X \leqslant 8{,}2 \iff -0{,}2 \leqslant X - 8 \leqslant 0{,}2 \iff \dfrac{-0{,}2}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-8}{\sigma} \leqslant \dfrac{0{,}2}{\sigma}$.
On a donc $P\left(\dfrac{-0{,}2}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-8}{\sigma} \leqslant \dfrac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}96$, soit par symétrie :
$P\left(\dfrac{X-8}{\sigma} \leqslant \dfrac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}02$.
La calculatrice donne $\sigma \approx 0{,}097$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** On a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} = 1$, donc $f(0) = 3 \times 0 \times 1 + 2 = 0 + 2 = 2$.
b. On a 12 s $= \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ (min).
On calcule $f(0{,}2) = 3 \times 0{,}2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0{,}2} + 2 = 0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}05} + 2 \approx 2 + 0{,}57 \approx 2{,}57$.
Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.

c. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-\frac{1}{4}t} = 0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\text{e}^{-0,25t} = 0$, donc finalement : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$.
Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à 2 μg/mL.

2. f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$f'(t) = 3\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 3t \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{-\frac{1}{4}t} = \text{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(3 - \dfrac{3}{4}t\right) = 3\text{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(1 - \dfrac{1}{4}t\right) = \dfrac{3}{4}(4-t)\text{e}^{-\frac{1}{4}t}$.

3. **a.** On sait que quel que soit le réel t, $\text{e}^{-\frac{1}{4}t} > 0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4 - t$:
- $4 - t \iff 4 > t$;
- $4 - t \iff 4 < t$;
- $4 - t = 0 \iff 4 = t$.

Conclusion : la fonction f est
- croissante sur $[0~;~4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) = 3 \times 4\text{e}^{-\frac{1}{4}\times 4} + 2 = 2 + 12\text{e}^{-1} \approx 6,41$;
- décroissante sur $[4~;~+\infty[$ de $f(4) \approx 6,41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$.

b. La fonction étant croissante sur $[0~;~4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) \approx 6,41$ puis décroissante sur $[4~;~+\infty[$, $f(4) = 2 + 12\text{e}^{-1} \approx 6,41$ est le maximum de la fonction sur $[0~;~+\infty[$.

4. **a.** Sur l'intervalle $[0~;~4]$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $f(0) = 2$ à $f(4) \approx 4,71$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $t_0 \in [0~;~4]$, tel que $f(t_0) = 2,5$.
La calculatrice donne :
$f(0) = 2$ et $f(1) \approx 4,33$, donc $0 < t_0 < 1$;
$f(0,1) \approx 2,29$ et $f(0,2) \approx 2,57$, donc $0,1 < t_0 < 0,2$;
$f(0,17) \approx 2,49$ et $f(0,18) \approx 2,52$, donc $0,17 < t_0 < 0,18$;
$f(0,174) \approx 2,499$ et $f(0,175) \approx 2,503$, donc $0,174 < t_0 < 0,175$.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 *appartenant à* $[4~;~+\infty[$ *vérifiant* $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 *à* 10^{-3} *près :* $t_1 \approx 18,930$.

b. Sur l'intervalle $[t_0~;~4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_0) = 2,5$ et sur l'intervalle $[4~;~t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_1) = 2,5$.
On a donc $f(t) > 2,5$ sur l'intervalle $]t_0~;~t_1[$ ce qui signifie que le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1 - t_0 \approx 18,93 - 0,175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.

5. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

a. La fonction Fsomme de deux fonctions dérivable sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$F'(t) = -12\text{e}^{-\frac{1}{4}t} - 12(t+4) \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = -12\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 3t\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 12\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = 3t\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = f(t)$. Donc F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. Le taux moyen est égal à :
$v_m = \dfrac{1}{t1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{t_1 - t_0}[F(t)]_{t_0}^{t_1} = \dfrac{1}{t_1 - t_0}[F(t_1) - F(t_0)] =$
$\dfrac{1}{t_1 - t_0}\left(-12(t_1+4)\text{e}^{-\frac{1}{4}t_1} + 2t_1 - \left[-12(t_0+4)\text{e}^{-\frac{1}{4}t_0} + 2t_0\right]\right) \approx 4,43$, soit en moyenne 4,4 μg/mL.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. M et N appartiennent à deux droites parallèles de la face FBCG ; les droites (FB) et (GN) sont coplanaires.
BCGF étant un carré on a donc $\overrightarrow{\text{FB}} = \overrightarrow{\text{GC}}$.
Or M étant le milieu de [FB], on a $\overrightarrow{\text{MB}}\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{FB}}$ et comme $\overrightarrow{\text{CN}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{GC}}$, on a donc $\overrightarrow{\text{MB}} = \overrightarrow{\text{CN}} \iff$ MBNC est un parallélogramme dont les diagonales [BC] et [MN] ont le même milieu I.

2. Voir la section sur la figure.

M et I appartiennent au plan (PMN) et à la face (BCGF), donc [MI] est l'intersection de la face (BCGF) du cube avec le plan.

Dans cette face (BCGF) dans le triangle (BCF), on a (droite des milieux : $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{FC}}$.

Or $\overrightarrow{\text{FC}} = \overrightarrow{\text{ED}}$, donc $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{ED}}$, donc les droites (MI) et (ED) sont parallèles, mais P $\in$ (ED), car P est le centre de la face (ADHE), donc la section du plan (PMN) avec la face (ADHE) est le segment [ED].

Il en résulte aisément les intersections avec la face (BAEF) : le segment [ME] et l'intersection avec la face (BCDA) : le segment [ID].

La section est donc le quadrilatère (MIDE).

Partie B :

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

- Pour le repère choisi on a $\text{M}\left(1~;~0~;~\dfrac{1}{2}\right)$, $\text{N}\left(1~;~1~;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{P}\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$. On en déduit les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{\text{MN}}(0~;~1~;~-1)$, $\quad \overrightarrow{\text{MP}}\left(-1~;~\dfrac{1}{2}~;~0\right)$.

Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{MN}} = 0+2-2 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{MP}} = -1+1+0 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan MNP est un vecteur normal à ce plan.

On sait qu'alors :

$M(x~;~y~;z) \in (\text{MNP}) \iff 1x+2y+2z+d = 0$.

En particulier on a :

$\text{P} \in (\text{MNP}) \iff 1\times 0+2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2}+d = 0 \iff 1+1+d = 0 \iff d = -2$.

Conclusion : $M(x~;~y~;z) \in (\text{MNP}) \iff x+2y+2z-2 = 0$.

2. On sait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP). Les équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP) s'obtiennent en traduisant l'égalité vectorielle :

Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{G}M} = t\overrightarrow{n}$, d'où avec G(1 ; 1 ; 1) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 1t\\ y-1 &=& 2t\\ z-1 &=& 2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$$

3. Si $M(x~;~y~y~;~z)$ appartient à la droite (d) et au plan (MN), ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite et l'équation cartésienne du plan, soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\\ x+2y+2z-2 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 1+t+2(1+2t)+2(1+2t)-2 = 0 \iff 3+9t = 0 \iff$$

$9t = -3 \iff t = -\dfrac{1}{3}$, d'où remplaçant dans les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-\frac{1}{3}\\ y &=& 1-\frac{2}{3}\\ z &=& 1-\frac{2}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3}\\ y &=& \frac{1}{3}\\ z &=& \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

On a donc $\text{K}\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{1}{3}~;~\dfrac{1}{3}\right)$.

On a $\text{GK}^2 = \left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$, d'où GK = 1.

4. On a vu dans la partie A que la section du cube par le plan (PMN) est le quadrilatère MEDI, donc le plan (MEDI) est le plan (PMN).

Dans la pyramide GMEDI la droite (d) contient G (question **2.**), est orthogonale au plan (MNP) ou (MEDI) (question **2.** et coupe le plan (MNP) en K (question **3.**). Donc [GK] est la hauteur de la pyramide dont le volume est :

$$V_{(\text{GMEDI})} : \frac{1}{3}\mathscr{A}(\text{AEDI}) \times \text{GK} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{8} \times 1 = \frac{3}{8} \text{ unité de volume.}$$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 &=& 5\\ u_{n+1} &=& 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}\end{array}\right.$

Partie A :

1. • Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$;

• Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9} + 4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.

2. Démonstration par récurrence ;

Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.

$u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \iff$

$3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3 - 2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4) - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.

Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2 ; il se factorise donc en :

$-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n + 1)(u_n + 2)$ et finalement :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{3 - \dfrac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \dfrac{10}{u_n+4} + 2} = \dfrac{2 - \dfrac{10}{u_n+4}}{5 - \dfrac{10}{u_n+4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 8 - 10}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n + 20 - 10}{u_n+4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n - 2}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n + 10}{u_+4}} = \dfrac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{2}{5}v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{4}{7}$.

b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}4^n = \dfrac{4}{7} \times 0{,}4^n$.

Comme $\dfrac{4}{7} < 1$ et $0{,}4 < 1$ et par conséquent $0{,}4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

2. On part de la définition :

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \iff v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \iff$

$v_n u_n - u_n = -2v_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \iff u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$

car $v_n \neq 1$.

3. $v_n = \dfrac{4}{7} \times 0{,}4^n$. On sait comme $0 < 0{,}4 < 1$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$ et finalement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1{,}01$
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

1. À la fin on a $n = 6$.
2. La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 : on a $u_5 \approx 1{,}017$; la valeur suivante est inférieure à 1,01 : $u_6 \approx 1{,}008$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

1. • Tout diviseur commun de a et de b est un diviseur commun de $a - b$ et de b ;
   • Tout diviseur commun de $a - b$ et de b est un diviseur commun de $(a - b) + b = a$
   Les diviseurs communs de a et b sont donc les diviseurs communs de $a - b$ et de b, donc leur plus grand diviseur est le même.
2. On a donc d'après le résultat précédent :
   $\text{PGCD}\left(4^3 - 1, 4^2 - 1\right) = \text{PGCD}\left(4^3 - 1 - 4^2 + 1\ ;\ 4^2 - 1\right) = \text{PGCD}\left(4^3 - 4^2\ ;\ 4^2 - 1\right) = \text{PGCD}(48\ ;\ 15) = \text{PGCD}(33\ ;\ 15) = \text{PGCD}(18\ ;\ 15) = \text{PGCD}(3\ ;\ 15) = 3$.
3.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

On admettra que pour tout entier naturel n non nul, u_n est un entier naturel non nul.

1. On a $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 4u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 4u_n \\ u_{n+1} + 0u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AU_n$,

   avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$.

a. On a $\det(P) = 1 \times -1 \times 4 = -3 \neq 0$, donc P est inversible.

Soit $P^{-1} = \begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$.

On sait que $P \times P^{-1} = I_2 = P^{-1} \times P$. Donc les nombres x, y, z et t vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+4z & = & 1\\ y+4t & = & 0\\ x+z & = & 0\\ y+t & = & 1\end{array}\right.$$

Par différence des équations 1 et 3, on obtient $3z = 1 \iff z = \dfrac{1}{3}$.

Par différence des équations 2 et 4, on obtient $3t = -1 \iff t = -\dfrac{1}{3}$.

D'où $x = -\dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{4}{3}$.

On a donc $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{4}{3}$, $z = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{1}{3}$.

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3}\\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$.

b. On a $AP = \begin{pmatrix}5 & -4\\1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 16\\1 & 4\end{pmatrix}$, puis

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3}\\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 16\\1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$.

3. *Initialisation* : d'après la question précédente : $D = P^{-1}AP$, d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$PD = AP$, puis $PDP^{-1} = A$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$ et supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Alors en multipliant à gauche par P^{-1}, puis à droite par P, on obtient :

$P^{-1}A^nP = D^n$. Multiplions chaque membre par $D = P^{-1}AP$:

$P^{-1}APP^{-1}A^nP = D^{n+1}$; or $PP^{-1} = I_2$, d'où :

$P^{-1}AA^nP = D^{n+1}$ et en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$PP^{-1}A^{n+1}PP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, soit finalement :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La relation est donc vraie au rang $(n+1)$.

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$ et $D^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^2\end{pmatrix}$.

Démontrons par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$.

Initialisation : $D^1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$ et supposons que $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$.

Alors $D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^{n+1}\end{pmatrix}$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$ pour tout naturel n non nul.

On a donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

$PD^n = \begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0\\0&4^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4^{n+1}\\1&4^n\end{pmatrix}$, puis

$PD^nP^{-1} = A^n = \begin{pmatrix}1&4^{n+1}\\1&4^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}&\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{4^n}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^n}{3}\end{pmatrix}$.

5. On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $V_n = A^nV_0$.

$V_n = A^nV_0$ ou encore $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{4^n}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^n}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{4^n}{3}&\frac{4}{3}-\frac{4^n}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3}\\ -\frac{1}{3}+\frac{4^n}{3}\end{pmatrix}$. Donc $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^n}{3}$.

6. **a.** D'après le résultat précédent :

$4u_n + 1 = 4\left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^n}{3}\right) + 1 = -\dfrac{4}{3} + 1 + \dfrac{4^{n+1}}{3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^{n+1}}{3} = u_{n+1}$.

On a donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. D'après la partie A :

PGCD$(u_{n+1},\, u_n)$ = PGCD$(4u_n + 1\,;\, u_n) = (3u_n + 1\,;\, u_n) = (2u_n + 1\,;\, u_n) = (u_n + 1\,;\, u_n) = (1\,;\, u_n) = 1$.

u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

c. On a démontré à la question **5.** que $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^n}{3}$ soit en multipliant chaque membre par 3 : $3u_n = -1 + 4^n$ et par conséquent $3u_{n1} = -1 + 4^{n+1}$.

On a donc PGCD$\left(4^{n+1} - 1,\, 4^n - 1\right)$ = PGCD$(3u_{n+1}\,;\, 3u_n)$.

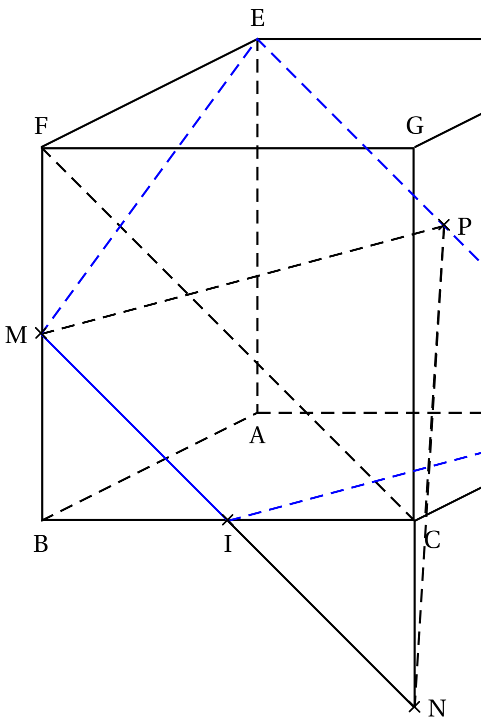
Comme PGCD$(u_{n+1},\, u_n) = 1$, PGCD$(3u_{n+1}\,;\, 3u_n) = 3 \times$ PGCD$(u_{n+1},\, u_n) = 3 \times 1 = 3$.

Deux termes consécutifs de la suite $(4^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour PGCD 3.

ANNEXE

À compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3



EXERCICE 4 (spécialité)

$A \leftarrow 4^3 - 1$
$B \leftarrow 4^2 - 1$
Tant que $A \neq B$:
    Si $A > B$, alors :
        $A \leftarrow A - B$
    Sinon :
        $B \leftarrow B - A$
    Fin Si
Fin Tant que