Baccalauréat Asie 10 juin 2024

Sujet 1

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. Par lecture graphique :

x	0	$1{,}5$	5
variations de f	$-5{,}5$ ↗	$2{,}4$	↘ $0{,}35$

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1{,}5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1{,}5 ; 5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée f' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

   La fonction f est concave sur $[0 ; 2{,}5[$ puis convexe sur $]2{,}5 ; 5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde f'' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si F est une primitive de f, on aura donc $f = F'$ et $f' = F''$.

   f est négative sur $[0 ; 0{,}5[$ puis positive, une primitive est donc décroissante sur $[0 ; 0{,}5[$ puis croissante : ce n'est pas le cas (c'est même exactement le contraire) de la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

   $\mathscr{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique d'une primitive de la fonction f.

Partie B

1. **a.** f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.
   On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x+1}$.
   $f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel x positif :
   $f'(x) = 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (4x - 2) = (4 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x+1} = (-4x + 6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. Déterminons le signe de $-4x + 6$: $\quad -4x + 6 > 0 \iff 6 > 4x$

   $$\iff \frac{3}{2} > x$$

   les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4 \times 0 - 2)\mathrm{e}^{-0+1} = -2\mathrm{e}$

   et $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (la limite en $+\infty$ est admise).

   Remarque : On a $-2\mathrm{e} \approx -5{,}43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A** et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}43$, là aussi, conforme.

   On a donc le tableau :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-4x+6$		$+$	0	$-$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

c. Pour tout réel x positif on a :

$f''(x) = -4\times\mathrm{e}^{-x+1} - 1\times\mathrm{e}^{-x+1}\times(-4x+6) = (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$: $4x-10>0 \iff 4x>10$

$$\iff x>\frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $4x-10$		$-$	0	$+$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. a. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ avec a et b deux nombres réels.

F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel x positif on a :

$F'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x+1} - \times\mathrm{e}^{-x+1}\times(ax+b) = (a-ax-b)\mathrm{e}^{-x+1} = (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1}$

$$\begin{aligned}
F \text{ est une primitive de } f &\iff F' = f\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}^+\quad (-ax-b+a)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R}^+\quad (-ax-b+a) = (4x-2)\quad \text{car}\quad \mathrm{e}^{-x+1}>0\\
&\iff \begin{cases}-a=4\\ a-b=-2\end{cases}\quad \text{par identification des coefficients}\\
&\iff \begin{cases}a=-4\\ b=a+2=-4+2=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

$F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = (-4\times8-2)\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

$I\approx 4{,}821$ soit $4{,}82$ à 10^{-2} près.

3. a. La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}426$

soit $2{,}43$ m au centimètre près.

b. L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale I calculée à la question **3.**

L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à $1\,\text{m}^2$.

On veut donc couvrir une surface de : $\dfrac{75}{100} \times 4,82\,\text{m}^2$ soit environ $3,62\,\text{m}^2$.

De plus : $\dfrac{3,62}{0,8} \approx 4,525$

Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

On a $x_{\overrightarrow{\text{AC}}} = -3x_{\overrightarrow{\text{AB}}}$, mais $y_{\overrightarrow{\text{AC}}} \neq -3y_{\overrightarrow{\text{AB}}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{\text{CD}} = 4 \times \overrightarrow{\text{AB}} + 0 \times \overrightarrow{\text{AC}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

b. À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{\text{CD}} = 4 \times \overrightarrow{\text{AB}} + 0 \times \overrightarrow{\text{AC}}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{CD}} = 4 \times \overrightarrow{\text{AB}}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. **a.** Comme on est dans un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont donc orthogonaux;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont aussi orthogonaux;

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation de la forme : $2x+y+2z+d=0$, où d est un réel donné.

De plus, $\text{A} \in (\text{ABC}) \iff 2x_\text{A}+y_\text{A}+2z_\text{A}+d=0$

$\iff 2\times 3+(-1)+2\times 1+d=0$

$\iff 6-1+2+d=0$

$\iff d=-7$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x+y+2z-7=0$.

c. Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\overrightarrow{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ. Et si la droite passe par S, de coordonnées $(2~;~1~;~4)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$\begin{cases} x = x_\text{S} + x_{\overrightarrow{n}}t \\ y = y_\text{S} + y_{\overrightarrow{n}}t \\ z = z_\text{S} + z_{\overrightarrow{n}}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ ce qui donne ici : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

d. On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ.

$M_t \in (\text{ABC}) \iff 2x_{M_t}+y_{M_t}+2z_{M_t}-7=0$

$\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0$

$\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0$

$\iff 9t+6=0$

$\iff t=\dfrac{-2}{3}$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t=\dfrac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2+2\times\dfrac{-2}{3}~;~1+\dfrac{-2}{3}~;~4+2\times\dfrac{-2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{1}{3}~;~\dfrac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$, on a donc :

$$\text{SI}=\sqrt{(x_\text{I}-x_\text{S})^2+\left(y_\text{I}-y_\text{S}\right)^2+(z_\text{I}-z_\text{S})^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$$

On arrive bien à SI = 2 unités graphique, et comme $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien SI = 2 cm.

4. a. Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CH}}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{CD}}\cdot\overrightarrow{\text{BH}}=4\times(-1)+0\times 4+(-4)\times -1=-4+0+4=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{\text{CH}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{CD}}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

On a $\text{BH}=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

b. On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

- $\text{AB} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ cm ;
- Comme on a $\overrightarrow{\text{CD}} = 4 \times \overrightarrow{\text{AB}}$, on a notamment, $\text{CD} = |4| \times \text{AB} = 4\sqrt{2}$ cm.

L'aire du trapèze ABDC est donc : $\mathscr{A}_{\text{ABDC}} = \dfrac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15\,\text{cm}^2$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathscr{V}_{\text{ABDCS}} = \dfrac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10\,\text{cm}^3$.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

1. Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 5,7 % des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0,057$.

2. a.
- On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès : « l'individu choisi a déjà été infecté », a une probabilité $p = 0,057$;
- Cette épreuve est répétée $N = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car le prélèvement des 100 individus est assimilé à un tirage avec remise) ;
- X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces répétitions.

Avec ces éléments, on peut affirmer que X suit la loi binomiale de paramètres $N = 100$ et $p = 0,057$.

Remarque : le paramètre donnant le nombre de répétitions est souvent noté n, plutôt que N, mais dans la question **2. e.**, un entier n est introduit, donc pour éviter le conflit de notation, on utilise N ici.

b. Puisque X suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0,057 = 5,7$. On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.

c. La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.

Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour k entier naturel inférieur à n) : $P(X = k) = \dbinom{N}{k} \times p^k \times (1-p)^{N-k}$.

On a donc, ici : $P(X = 0) = \dbinom{100}{0} \times 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028$.

d. La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :

$P(X \geqslant 2) = 1 - P\left(\overline{X \geqslant 2}\right) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).

À la calculatrice, on obtient : $P(X \geqslant 2) \approx 0,9801$.

e. Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leqslant 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leqslant 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,9408$.

L'entier cherché est 9.

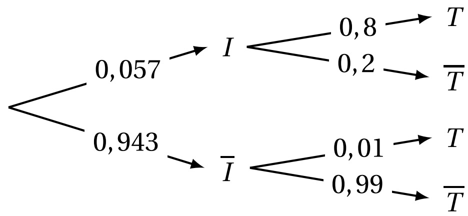
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

Partie B

1. L'évènement I est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.

- La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
- celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right) = 0,99$.

Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :

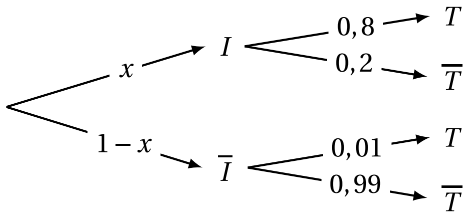


2. Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,055\,03$.

3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.
D'après la définition des probabilités conditionnelles :
$P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{0,057 \times 0,8}{0,055\,03} = \dfrac{4560}{5503} \approx 0,828\,6$.
Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,828 6 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

Partie C

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x.
On a donc l'arbre suivant :



Les évènements I et $\overline{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01$.
D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.
On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$
Résolvons : $0,79x + 0,01 = 0,294\,4 \iff 0,79x = 0,284\,4$

$$\iff x = \frac{0,284\,4}{0,79}$$
$$\iff x = \frac{2\,844}{7\,900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\dfrac{2\,844}{7\,900} = 0,36$.
Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.

Exercice 4 **5 points**

1. **Affirmation 1 : FAUSSE.**

   La propriété du cours indique que toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.

   Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.

   La suite constante égale à 1 est décroissante (mais pas strictement décroissante) et minorée par 0 (entre autres), et pourtant, elle converge vers 1, et pas vers 0.

   Si on préfère donner un contre exemple avec une suite strictement décroissante, on peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, par exemple. Cette suite est assez clairement décroissante, minorée par 0 et converge vers 1.

2. **Affirmation 2 : VRAIE.**

   En effet, pour n entier naturel : $v_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

   Comme on a : $\dfrac{9}{7} > 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$.

   Par ailleurs : $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$.

   Finalement, par limite du produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty$.

   Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

   L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

   Puis, la boucle `for` va s'exécuter `N` fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et `N-1`, donc ici 0, 1, 2 et 3.

   - La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1 ;
   - La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à $1 + 1 = 2$;
   - La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à $2 + 2 = 4$;
   - La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à $4 + 3 = 7$.

   On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

4. **Affirmation 4 : FAUSSE.**

   Pour connaître le montant total du prix A, il suffit de multiplier 1000 par 15. Le montant total est donc de 15 000 €.

   Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premier termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jours) et de raison 2 (car le montant chaque jour est le double du montant de la veille).

   On applique la formule connue : $1 \times \dfrac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = \dfrac{1 - 2^{15}}{-1} = 2^{15} - 1 = 32\,767$.

   Comme $32\,767 > 15\,000$, le prix B est (nettement) plus avantageux.

   Remarque : En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi (patiemment) calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue au quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16\,384$, donc rien que la somme reçue le quinzième jour du prix B est strictement supérieure aux quinze jours cumulés pour le prix A.

5. **Affirmation 5 : VRAIE.**

   Soit n un entier naturel non nul quelconque :

   - La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $\ln(1) = 0$, donc on en déduit que la fonction ln est à valeurs positives sur $[1~;~+\infty[$ (voire à valeurs strictement positives sur $]1~;~+\infty[$).
   - $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \int_1^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x - \int_1^{n} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x \quad \text{par la relation de Chasles} \end{aligned}$$
   - l'expression $v_{n+1} - v_n$ est donc l'intégrale, entre deux bornes ordonnées dans l'ordre croissant (car $n < n+1$) d'une fonction à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration (car $[n~;~n+1] \subset [1~;~+\infty[$, puisque $n \geqslant 1$) : cette expression est donc positive.

   Pour un n quelconque supérieur à 1, la différence entre les termes v_{n+1} et v_n est positive, donc la suite (v_n) est bien croissante.