Baccalauréat Métropole [1] 19 juin 2024

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

1. On sait que $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: géométriquement l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f au voisinage de plus l'infini. L'affirmation 1 est vraie.

   On a $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = e^{-x}(5-5x) = 5e^{-x}(1-x)$.

   $f'(x)+f(x) = 5e^{-x}(1-x)+5xe^{-x} = 5e^{-x}$, donc f vérifie l'équation différentielle (E) : l'affirmation 2 est vraie.

2. La suite (v_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien de sa monotonie, rien sur sa convergence : l'affirmation 3 est fausse.

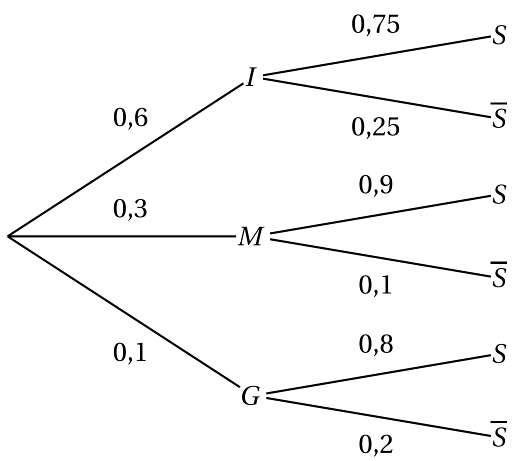
   Exemple : $u_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$: on ne peut rien dire de la suite (v_n).

   Si (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, on a donc

   $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0$: on a bien l'encadrement considéré : l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité cherchée est $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

3. On a de même $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.

   $p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.

   D'après la loi des probabilités totale :

   $p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,45 + 0,35 = 0,8$.

1. Antilles-Guyane, Maroc

4. on a $p_S(I) = \dfrac{p(S \cap I)}{p(S)} = \dfrac{p(I \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16} = 0{,}5625$, soit 0,563 au millième près.

5. **a.** Les conditions de l'étude sont telles que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

b. D'après la calculatrice $p(X \geqslant 25) = 1 - p(X \leqslant 24) \approx 1 - 0{,}5725$ soit environ 0,4275, donc 0,428 au millième près.

6. Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $p(X \geqslant n) > 0,99$, donc tel que $1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \iff n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$

Or $\dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 20,6$.

Il faut donc interroger au moins 21 personnes.

7. **a.**

- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc
- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.

b. Il faut trouver :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9)$ ou encore $p(4 < T < 10) = p(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)) =$

$p(-3 < T - E(T) < 3)$ soit $p(|T - E(T)| < 3)$ ou encore $1 - p(|T - E(T)| \geqslant 3)$ et finalement d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{V(T)}{3^2}$, soit

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \dfrac{3}{9}$ et finalement :

$p(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 3 — 5 points

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{CA}}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{25}{2}\end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} = 5 - 5 + 0 = 0$ et

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = 0 + 0 + 0 = 0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{CAD}) \iff 1x - 1y + 0z + d = 0 \iff x - y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ceci est vrai pour exemple pour C :

$C(0\,;\,0\,;\,10) \in (\text{CAD}) \iff 0 - 1y + 0 + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$, soit $d = 0$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{CAD}) \iff x - y = 0$.

2. **a.** Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$\mathrm{H}(x\,;\,y\,;\,z) \in D \cap (\mathrm{CAD}) \iff \begin{cases} x & = & +\frac{5}{2}t \\ y & = & 5-\frac{5}{2}t \\ z & = & 0t \\ x-y=0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{5}{2}t - \left(5-\dfrac{5}{2}t\right) = 0 \iff$

$5t-5=0 \iff t=1$.

Donc $\mathrm{H}\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in D \iff \begin{cases} x & = & 0+\frac{5}{2}t \\ y & = & 5-\frac{5}{2}t \\ z & = & 0+0t \end{cases}$

On reconnait dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$ et $(0\,;5\,;0)$ sont les coordonnées de B.

Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

Or on a vu que le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD), donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H.

3. a. On a vu que (BH) $= D$ donc a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2} + 0 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

b. On a $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right\| = \mathrm{BH} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ et

$\left\|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right\| = \mathrm{HA} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\mathscr{A}(\mathrm{ABH}) = \dfrac{\mathrm{BH} \times \mathrm{HA}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{25 \times 2}{8} = \dfrac{25}{4}$.

4. a. Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $\left(\mathrm{O},\ \vec{k}\right)$ qui est perpendiculaire au plan (ABH), donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre ABCH.

b. De façon évidente CO = 10, donc :

$\mathscr{V}(\mathrm{ABCH}) = \dfrac{\mathscr{A}(\mathrm{ABH}) \times \mathrm{CO}}{3} = \dfrac{\frac{25}{4} \times 10}{3} = \dfrac{125}{6}$.

5. On a $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0+0+0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B.

On a $\mathrm{BA}^2 = 5^2$, donc BA = 5 et $\mathrm{BC}^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$, donc $\mathrm{BC} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$\mathscr{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{\mathrm{AB} \times \mathrm{BC}}{2} = \dfrac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$.

On a $\mathcal{V}(\text{ABCH}) = \dfrac{\mathcal{A}(\text{ABC}) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

On a donc : $\dfrac{125}{6} = \dfrac{\dfrac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \dfrac{125}{6} \times \dfrac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A : étude de la fonction f.

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur }]0\,;\,+\infty[$$

1. **a.**

• Limite en 0 : On sait que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x - 2 = -2$ et que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x + 1$ et
$2x + 1 > 2x > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant le quotient :
$f''(x) = \dfrac{1 \times x - 1 \times (x+1)}{x^2} = \dfrac{x - x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.
Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.
Conclusion : la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

2. **a.** Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Comme $f(1) = 1 - 2 + 0{,}5 \times \ln 1 = -1$ et
$f(2) = 2 - 2 + \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;2]$ montre que $\alpha \in [1\,;\,2]$.

b. On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :
$\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha \iff \ln\alpha = 2(2 - \alpha)$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0\,;1]$, $\quad g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0\,;\,1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = -2\times\dfrac{7}{8}x+1-\dfrac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{7}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x-x\dfrac{1}{4} = -\dfrac{8}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x =$
$1-2x-\dfrac{x\ln x}{2}$.

Puisque $x\neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x}-2-\ln x\dfrac{1}{2}\right)$.

Posons $X=\dfrac{1}{x} \iff x=\dfrac{1}{X}$; en remarquant que $X=\dfrac{1}{x}\Rightarrow \ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$, on peut écrire :

$g'(x)=\dfrac{1}{X}\left(X-2+\dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. a. On a vu dans la partie A que $0<x<\alpha\Rightarrow f(x)<0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{x}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$.

b. D'après le tableau de signes admis comme $0<x\leqslant 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x)>0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. a. On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x\leqslant 0$ et comme $x^2\geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x\geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2+x\leqslant -\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.

b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x\longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{rcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} =$

$-\dfrac{1}{9}-\left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{9\alpha^3}\right) = -\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$,

soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}-\frac{1}{3\alpha^3}\left(-4+2\alpha-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}+\frac{4}{3\alpha^3}-\frac{2}{3\alpha^2}+\frac{1}{9\alpha^3} =$

$\dfrac{-\alpha^3+12-6\alpha+1}{9\alpha^3} = \dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\,\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(x^2 \ln x\right)\,\mathrm{d}x$,

soit d'après le calcul précédent :

$\mathscr{A} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \dfrac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07.$