∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 20 juin 2024 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

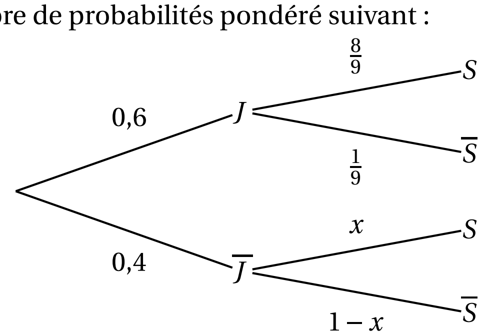
Exercice 1 — 4 points

1. D'après l'énoncé $P(J) = 0{,}6$ et $P_J(S) = \dfrac{8}{9}$.

On a donc $P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0{,}6 \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{4{,}8}{9} = \dfrac{3 \times 1{,}6}{3 \times 3} = \dfrac{1{,}6}{3} = \dfrac{5 \times 1{,}6}{5 \times 3} = \dfrac{8}{15}$.

2. **a.** On sait que $P(S) = \dfrac{2}{3}$.

On commence l'arbre de probabilités pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(J \cap S) + P\left(\overline{J} \cap S\right)$, soit $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15} + P\left(\overline{J} \cap S\right) \iff P\left(\overline{J} \cap S\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{10}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$.

La probabilité que la personne choisie n'a pas l'intention de regarder les JO à la télévision et a une activité sportive régulière est égale à $\dfrac{2}{15}$;

b. On a $P_{\overline{J}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{J} \cap S\right)}{P\left(\overline{J}\right)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{0{,}4} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{15} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{3} = x$.

3. **a.** Les personnes sont choisies au hasard et chacune d'elles a une pratique sportive régulière avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

b. On a $P(X = 16) = \dbinom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{30-16} = \dbinom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{14} \approx 0{,}0462$ soit 0,046 au millième près à la calculatrice.

c. On a $\dfrac{10\,000}{380} \approx 26{,}3$: on peut donc offrir 26 entrées gratuites au maximum.
La calculatrice donne $P(X \leqslant 26) \approx 0{,}9967$ soit environ 0,997. La probabilité que le budget soit insuffisant est donc égale à environ $1 - 0{,}997$ soit environ 0,003 ou trois millièmes.

Exercice 2 — 5 points

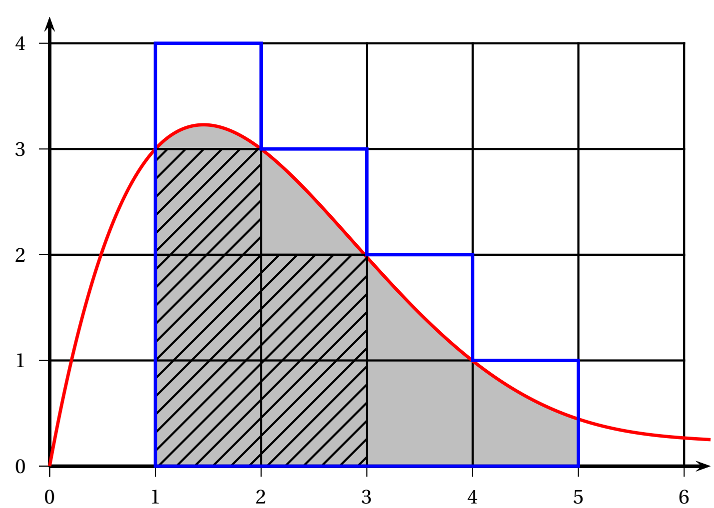
1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f(x) = \text{e}^{-3x}$ **B.** $f(x) = -\dfrac{4}{3}\text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

C. $f(x) = \text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$ **D.** $f(x) = -\dfrac{10}{3}\text{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

L'équation différentielle $y' = -3y$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto f(x) = K\text{e}^{-3x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ si et seulement si $y' = 0 = -3\alpha + 7 \iff 3\alpha = 7 \iff \alpha = \dfrac{7}{3}$.
On sait qu'alors les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ sont les fonctions $x \longmapsto K\text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$.
En particulier la fonction f solution telle que $f(0) = 1 \iff K + \dfrac{7}{3} = 1 \iff K = -\dfrac{4}{3}$.
La seule solution est donc la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{4}{3}\text{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$: réponse **B.**

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est donnée ci-dessous.



Le dessin est clair : la fonction est positive sur l'intervalle$[1\,;5]$; l'intégrale est (en unités d'aire) la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.
La surface grise contient les 5 carreaux hachurés et est inscrite dans le polygone de 10 unités en bleu. Réponse **C.**

3. On sait que si g' est la dérivée de g, alors g est une primitive de la fonction g', donc : $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 = 2^2\ln\left(2^2+2\right) = 4\ln 4+4) = 4\ln 8$ ou $4\ln 2^3 = 3\times 4\ln 2 = 12\ln 2 \approx 8{,}31$ soit 8,3 au dixième près. Réponse **B.**

4. Le nombre de groupes de 5 élèves parmi les 31 est $\binom{31}{5}$. Réponse : **D.**

5. Elle choisit 3 élèves parmi les 20 faisant SES : elle a $\binom{20}{3}$ possibilités; ensuite dans chacun de ces cas elle choisit 2 élèves parmi les $31-20=11$ élèves qui ne font pas SES, ce qui fait $\binom{20}{3}\times\binom{11}{2}$ possibilités. Réponse **A.**

Exercice 3 — 6 points

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.**
   - $u_1 = 8 - \ln 2 \approx 7{,}31$;
   - $u_2 = 8 - \ln 2 \ln 8 - \ln 24 - \approx 6{,}70$.

   b. `mystere(10)` donne la somme des premiers termes de la suite de u_0 à u_9, soit $u_0+u_1+\ldots+u_9 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   c. Il suffit en ligne 7 de remplacer S par (S /k)

2. $$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

   La fonction f somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle en posant $u(x)=\dfrac{x}{4}$, d'où $u'(x)=\dfrac{1}{4}$,
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{\frac{x}{4}} = 1 - \dfrac{1}{4}\times 4\dfrac{1}{x} = 1-\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$
   Comme $x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$:
   - si $0<x<1$, alors $x-1<0$: la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,1[$;
   - si $x>1$, alors $x-1>0$: la fonction f est croissante sur $-1\,;\,+\infty[$
   - si $x=1$, alors $f'(1)=0$ et $f(1) = 1-\ln\dfrac{1}{4} = 1-(-\ln 4) = 1+\ln 4$ est le minimum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** *Initialisation* : on a vu que $u_1 \approx 7{,}3$ et comme $u_0 = 8$, on a donc :

$$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$$

l'encadrement est vrai au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
On sait que sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ la fonction f est croissante, donc on a
$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.
Or $f(1) = 1 - \ln\dfrac{1}{4} \approx 2{,}39$, donc $f(1) \geqslant 1$ et on a
$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est encore au rang suivant : d'après le principe de récurrence :
pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. L'encadrement précédent montre que : pour tout naturel n
- $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante ;
- $1 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 1.

On sait qu'alors la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 1$

c. $f(x) = x \iff x - \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = x \iff 0 = \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \iff \dfrac{x}{4} = 1 \iff x = 4$.

d. Par continuité de la fonction f (car elle est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$), la relation
$u_{n+1} = u_n - \ln\left(\dfrac{u_n}{4}\right)$, donne puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$:
$\ell = \ell - \ln\left(\dfrac{\ell}{4}\right)$: d'après la question précédente $\ell = 4$.

Exercice 4 — 5 points

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C sont distincts et non alignés : ils définissent le plan $\mathscr{P} = (\text{ABC})$.

Dans la suite, on considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 10 + 3 - 13 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 4 + 6 - 10 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan

b. On sait qu'alors :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 2x - 3y + 1z + d = 0, d \in \mathbb{R}$.

Par exemple $A(-1\ ;\ -1\ ;\ 17) \in (ABC) \iff -2+3+17+d=0 \iff d=-18$, donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff 2x-3y+z-18=0$.

3.

$$d\ :\ \begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= t+5 \\ z &= 4t+1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. On sait que les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de d sont les coefficients de t, soit $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

b. Les coordonnées de E commun à d et au plan (ABC) vérifient les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de (ABC) soit le système

$$\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= t+5 \\ z &= 4t+1 \\ 2x-3y+1z-18 &= 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(3t+2)-3(t+5)+4t+1-18=0 \iff 6t+4-3y-15+4t+1-18=0 \iff$

$7t-28=0 \iff 7t=28 \iff t=4$.

D'où les coordonnées de E en remplaçant t par dans les équations de d : $E(14\,;9\,;17)$

4. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) soit le vecteur $\overrightarrow{n}$.

Une équation de Δ est donc $\begin{cases} x &= 2t+2 \\ y &= -3t+5 \\ z &= t+1 \\ 2x-3y+1z-18 &= 0 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

En résolvant le système obtenu en rajoutant l'équation de $\mathscr{P}$ permet d'obtenir $t=2$, d'où $F(6\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

Puisque la droite (DF) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, la distance DF est la (plus courte) distance du point au plan $\mathscr{P}$.

Or $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$, d'où $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = DF^2 = 4^2+(-6)^2+2^2 = 16+36+4 = 56 = 4\times 14$.

On a donc $DF = \sqrt{4\times 14} = \sqrt{4}\times\sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ (en centaines de metres).

5. La plus petite distance du point de lancer au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres : il faut donc calculer le temps mis à la vitesse de 18,6 m.s^{-1} par un drone pour effectuer ce parcours de D à F.

On sait que $v = \dfrac{d}{t}$, ou $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{DF}{v} = \dfrac{2\sqrt{14}\times 100}{18{,}6} \approx 40{,}23$ (secondes).

Conclusion : le drone n'arrivera pas à temps.