REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques

I-1- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$ (2 ; -8) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ (-8 ; -8)

I-2- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \mathbf{2\times(-8) - 8\times(-8) = -16 + 64 = 48}$

I-3- $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{\mathbf{2^2+(-8)^2}} = \sqrt{\mathbf{68}} = \sqrt{\mathbf{4\times 17}} = \mathbf{2\sqrt{17}}$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\mathbf{(-8)^2+(-8)^2}} = \sqrt{\mathbf{64+64}} = \sqrt{\mathbf{128}} = \sqrt{\mathbf{64\times 2}} = \mathbf{8\sqrt{2}}$

I-4- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{34}}}$

En effet : $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\|\times\|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\|\times\cos(\widehat{\boldsymbol{ABC}})$ **donc** $\cos(\widehat{\boldsymbol{ABC}}) = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\|\times\|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\|} = \frac{\mathbf{48}}{\mathbf{16}\sqrt{\mathbf{34}}} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{34}}}$

I-5- $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{34}}}$

En effet : $\cos^2(\widehat{\boldsymbol{ABC}}) + \sin^2(\widehat{\boldsymbol{ABC}}) = \mathbf{1}$

donc $\sin(\widehat{\boldsymbol{ABC}}) = \sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos}^2(\widehat{\boldsymbol{ABC}})} = \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{34}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{34}}} = \frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{34}}}$

I-6- La valeur exacte de l'aire du triangle ABC est 40 unités d'aire.

En effet : $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{BA}\times\boldsymbol{BC}\times\sin(\widehat{\boldsymbol{ABC}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{8\sqrt{2}\times 2\sqrt{17}}\times\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{34}}} = \mathbf{8\sqrt{34}}\times\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{34}}} = \mathbf{8\times 5 = 40}$

I-7- Dans le tétraèdre $ABCD$, la droite (DC) représente **la hauteur issue de** $\boldsymbol{D}$ **du tétraèdre.**

I-8- $\mathcal{V} = \frac{\mathbf{800}}{\mathbf{3}}$ unités de volume

En effet : $\boldsymbol{DC} = \mathbf{20}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{A_{ABC}}\times\boldsymbol{DC} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{40\times 20} = \frac{\mathbf{800}}{\mathbf{3}}$

I-9- $\vec{n}.\overrightarrow{BA} = \mathbf{4\times 2 + 1\times(-8) + 0 = 0}$

I-10- $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

En effet : $\vec{\boldsymbol{n}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = \mathbf{0}$ **donc** $\vec{\boldsymbol{n}}\perp\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\,(\mathbf{-10\,;0\,;20})$ **et** $\vec{\boldsymbol{n}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \mathbf{4\times(-10) + 0 + 2\times 20 = 0}$ **donc** $\vec{\boldsymbol{n}}\perp\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$.

$\vec{\boldsymbol{n}}$ **est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan** $(\boldsymbol{ABD})$ **donc c'est un vecteur normal au plan** $(\boldsymbol{ABD})$.

I-11- Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $\boldsymbol{4x + y + 2z - 24 = 0}$

En effet : $\vec{\boldsymbol{n}}\,(\mathbf{4\,;1\,;2})$ **est un vecteur normal au plan** $(\boldsymbol{ABD})$ **donc une équation cartésienne du plan** $(\boldsymbol{ABD})$ **est de la forme :** $\boldsymbol{4x + y + 2z + d = 0}$.

$\boldsymbol{A} \in (\boldsymbol{ABD})$ **donc** $\mathbf{4\times 6 + 0 + 0} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{d} = \mathbf{-24}$

I-12- Coordonnées du point A' (0 ; 0 ; 12)

I-13- $k = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

En effet : $\overrightarrow{\boldsymbol{DA}}\,(\mathbf{10\,;0\,;-20})$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{DA'}}\,(\mathbf{4\,;0\,;-8})$ **donc** $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{-8}}{\mathbf{-20}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

I-14-	A) 17 u.v.	B) 107 u.v.	C) 160 u.v.	D) 250 u.v.

I-15- Coordonnées du point I (1 ; 0 ; 0)

I-16- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ (-10 ; 0 ; 0)

I-17- Une équation du plan médiateur P_1 du segment $[AC]$ est $x = 1$.

En effet :

$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ (-10 ; 0 ; 0) **est un vecteur normal au plan** P_1 **donc une équation de** P_1 **est** $-10x + d = 0$.

De plus $I(1\,;0\,;0)$ **est un point de** P_1 **donc** $-10 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 10$

Donc une équation du plan P_1 **est** $-10x + 10 = 0$ **soit** $x = 1$.

I-18- Une équation du plan médiateur P_2 du segment $[AB]$ est $x - 4y + 11 = 0$.

En effet :

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (-2 ; 8 ; 0) **est un vecteur normal au plan** P_2 **donc une équation de** P_2 **est** $-2x + 8y + d = 0$.

De plus J $(5\,;4\,;0)$**, milieu du segment** $[AB]$ **est un point de** P_2 **donc** $-2 \times 5 + 8 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22$

Donc une équation du plan P_2 **est** $-2x + 8y - 22 = 0$ **soit** $x - 4y + 11 = 0$.

I-19- Coordonnées du centre Ω de la sphère $(\mathcal{S})$: Ω (1 ; 3 ; 10)

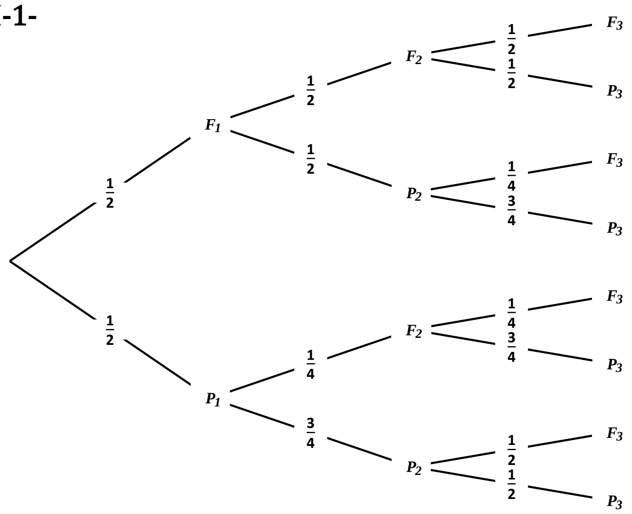
En effet : **Ω est le point d'intersection des trois plans médiateurs donc ses coordonnées vérifient le système :** $\begin{cases} x = 1 \\ x - 4y + 11 = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4y = 12 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 10 \end{cases}$.

I-20- $R = \sqrt{134}$

En effet : $R = \Omega A = \sqrt{(6-1)^2 + (0-3)^2 + (0-10)^2} = \sqrt{25 + 9 + 100} = \sqrt{134}$

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques

II-1-



II-2-

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\mathbf{\frac{3}{16}}$	$\mathbf{\frac{15}{32}}$	$\mathbf{\frac{7}{32}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$

II-3- $E(X) = \mathbf{0 + \frac{15}{32} + \frac{14}{32} + \frac{3}{8} = \frac{41}{32}}$

II-4- $u_1 = \mathbf{1}$ $\qquad u_2 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

II-5-a- $v_0 = -\frac{8}{5}$

II-5-b- (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

En effet : $\boldsymbol{v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{20} = -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{4}v_n}$

II-6- Pour tout $n \geq 0$, $u_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$.

En effet : **Pour tout entier** $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{v_n = v_0\left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$ **et** $\boldsymbol{u_n = v_n + \frac{3}{5}}$

II-7- La suite (u_n) est convergente de limite $\frac{3}{5}$.

En effet : $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0}$ **car** $\boldsymbol{-1 < -\frac{1}{4} < 1}$ **donc** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0}$ **et** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}}$

II-8- $P_{A_n}(A_{n+1}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$ $\qquad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

II-9- $P(\overline{A_n}) = \boldsymbol{1 - p_n}$ $\qquad P(A_{n+1} \cap A_n) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\,p_n}$ $\qquad P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \boldsymbol{\frac{3}{4}(1 - p_n)}$

II-10- $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.

En effet : $\boldsymbol{p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{2}\,p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}}$

II-11-a- $P(F_n \cap A_n) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\,p_n}$ $\qquad P(F_n \cap \overline{A_n}) = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - p_n)}$

II-11-b- $\lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{5}$

En effet : $\boldsymbol{P(F_n) = P(F_n \cap A_n) + P(F_n \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{2}\,p_n + \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{4}\,p_n + \frac{1}{4}}$

Comme $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5}}$, $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{1}{4}\,\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}}$

REPONSES A L'EXERCICE III de Mathématiques

III-1- Solution générale de (E_1) : $y = ke^{-\lambda t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

III-2- $Q(x) = 0,6\, e^{-\lambda t}$

En effet : $Q(0) = 0,6 \Leftrightarrow ke^{0} = 0,6 \Leftrightarrow k = 0,6$

III-3- $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0$ La fonction Q est strictement décroissante

III-4- $\lambda = -\ln(0,7) = \ln\left(\frac{10}{7}\right)$ $\lambda \approx 0{,}3567$

En effet : $Q(1) = (1 - 0,3) \times 0,6 = 0,7 \times 0,6 = 0,42$

Ce qui donne $0,6\, e^{-\lambda \times 1} = 0,42 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,7 \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0,7) \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0,7)$

III-5- $t_e = -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7}$ $t_e \approx 5{,}02$ heures

En effet : $Q(t) \geq 0,1 \Leftrightarrow 0,6\, e^{(\ln 0,7)\, t} \geq 0,1 \Leftrightarrow e^{(\ln 0,7)\, t} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow (\ln 0,7)t \geq -\ln 6 \Leftrightarrow t \leq -\frac{\ln 6}{\ln 0{,}7}$

Car $\ln 0,7 < 0$.

III-6- g est une solution de (E_2).

En effet : $g'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$ et $g'(t) + g(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$

III-7- Solution générale de (E_2) : $y = e^{-\frac{t}{2}} + ke^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

III-8- $f(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$

En effet : $f(0) = 0 \Leftrightarrow e^{0} + ke^{0} = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$

III-9- $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 0$ Equation de Δ : $y = 0$

III-10- $a = 1$ $b = -\frac{1}{2}$

En effet : $q'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}}\right)$

III-11- $q'(t) > 0$ pour $t \in [0\,; \ln 4[$

En effet : $q'(t) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}} > 0$ car $e^{-\frac{t}{2}} > 0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t}{2} > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t}{2} > -\ln 2 \Leftrightarrow t < 2\ln 2$

III-12- $y_A = \frac{1}{4}$

En effet : $y_A = e^{-\frac{\ln 4}{2}} - e^{-\ln 4}$

$= e^{-\ln 2} - e^{-\ln 4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

III-13-

x	0		$\ln 4$		$+\infty$
Signe de $q'(x)$		+	0	-	
Variations de q	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

III-14- Le médicament ne va pas causer des effets indésirables au patient.

En effet : la valeur maximale de $q(t)$ est $\frac{1}{4}$ ce qui est inférieur à $0,3$ mg/L.

III-15-	A) Voie orale	B) Voie intraveineuse	C) Peu importe lequel
III-16-	A) Voie orale	B) Voie intraveineuse	C) Peu importe lequel