Mathématiques – QCM (40 points)
Correction

Première partie – Fonctions

Exercice I

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

I-A- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Vrai.

La quantité $x^2 + 1$ est strictement positive pour tout nombre réel x.

I-B- $f'(0)$ est égal à 1.

Faux.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Donc $f'(0) = 0$.

I-C- Pour tout x strictement négatif, $f(x)$ est strictement négatif.

Faux.

Pour $x = -1$, $f(-1) = \ln 2$ et $\ln 2 > 0$ car $2 > 1$.

I-D- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Vrai.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice II

Soient g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

II-A- Si $g(1) = 0$, alors C_g coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(1 ; 0)$.

Faux.

Si $g(1) = 0$, alors C_g coupe l'axe des <u>abscisses</u> au point de coordonnées $(1 ; 0)$.

II-B- Si $g(1) = 2$ et $g'(1) = 3$, alors la courbe C_g admet une tangente d'équation $y = 3x - 1$ au point de coordonnées $(1 ; 2)$.

Vrai.

L'équation réduite de la tangente à C_g au point de coordonnées $(1 ; 2)$ est donnée par la formule : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ ce qui donne $y = 3(x-1) + 2$ soit $y = 3x - 1$.

II-C- Si g est deux fois dérivable et si sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$, alors la courbe C_g est en dessous de chacune de ses tangentes.

Faux.

Si g est deux fois dérivable et si sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$, cela signifie que la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$, et donc la courbe C_g est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Exercice III

III-A- Pour tout nombre réel x, $e^{3x+1} = e^{3x} + e$.

Faux.

Pour $x = 0$, $e^{3x+1} = e$ et $e^{3x} \times e = e^2$ et $e^2 \neq e$.

Remarque : Pour tout nombre réel x, on a : $e^{3x+1} = e^{3x} \times e$.

III-B- Pour tout nombre réel x non nul, $\frac{\ln(x^2)}{\ln(x^2+4)} = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)$.

Faux.

Pour $x = 1$, $\frac{\ln(x^2)}{\ln(x^2+4)} = 0$ et $\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = -\ln 5$.

Remarque : Pour tout nombre réel x non nul, on a : $\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = \ln(x^2) - \ln(x^2+4)$.

III-C- Pour tout nombre réel x positif, $2\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right) = x$.

Faux.

Pour $x = 1$, $2\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right) = 2\ln e = 2$.

Remarque : Pour tout nombre réel x positif, on a : $2\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x}$.

III-D- L'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ est $\{0\}$.

Faux.

On pose $X = e^{x}$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Les solutions de cette équation sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$, qui correspondent respectivement aux valeurs $x_1 = \ln 1 = 0$ et $x_2 = \ln 2$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ est $\{0\,;\ln 2\}$.

Exercice IV

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}$.

IV-A- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Faux.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(1+e^{-2x})}{e^{x}(1+e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} e^{x}\frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-x}} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-x}} = 1$.

IV-B- $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$.

Vrai.

$\lim\limits_{x \to 0} e^{x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{2x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1} = \frac{2}{2} = 1$.

IV-C- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$.

Vrai.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1} = \frac{1}{1} = 1$.

IV-D- Pour tout réel x, $h'(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x}+1}$.

Faux.

Pour tout réel x, $h'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{x}+1) - e^{x}(e^{2x}+1)}{(e^{x}+1)^2} = \frac{2e^{3x} + 2e^{2x} - e^{3x} - e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+1} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+1}$.

Deuxième partie – Suites numériques

Exercice V

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $u_2 = 1$.

V-A- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Vrai.

Comme $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

V-B- Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Faux.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

V-C- Pour tout entier naturel n non nul, $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Vrai.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Exercice VI

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

VI-A- $v_1 = \frac{1}{6}$.

Faux.

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}.$$

VI-B- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Faux.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite est strictement croissante.

VI-C- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Faux.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $v_0 = 0$ donc elle ne peut pas converger vers 0.

VI-D- Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{n}{n+1}$.

Vrai. Démonstration par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\frac{0}{0+1} = 0 = v_0$. Donc la propriété est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons la propriété vraie au rang n.

On a donc $v_n = \frac{n}{n+1}$ pour ce rang.

Alors

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Ce qui correspond bien à l'égalité attendue au rang $n+1$. Donc on a bien l'hérédité.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{n}{n+1}$.

Troisième partie – Probabilités

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω.

Exercice VII

Pour tous événements A et B de probabilité dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a :

VII-A- $P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$.

Vrai.

Remarque : Les deux expressions correspondent à $P(A \cap B)$.

VII-B- $P_A(A) = 1$.

Vrai.

Remarque : Sachant que A est réalisé, alors A est l'événement certain et sa probabilité est donc de 1.

$P_A(A) = \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = 1$.

VII-C- $P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_A(B)$.

Faux.

Si $B \subset A$ alors $P_{\bar{A}}(B) = 0$. Si de plus $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$ alors $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$.

VII-D- $P(B) = P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)$.

Faux.

Si $B \subset A$ alors $P_{\bar{A}}(B) = 0$. Si de plus $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$ alors $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$.

Exercice VIII

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$.

VIII-A- $P(1 \leq X < 3) = P(X \leq 2) - P(X = 0)$.

Vrai.

En effet, X ne prend que des valeurs entières entre 0 et 10.

VIII-B- $P(X > 1)$ est strictement positive.

Vrai.

Cette probabilité est nécessairement positive. Par ailleurs, $P(X > 1)$ est non nulle.

VIII-C- $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$.

Faux.

$P(X = 0) = 0{,}8^{10}$.

Quatrième partie – Géométrie dans le plan

Exercice IX

On considère les points A, B et C de coordonnées respectives dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$:
$A(-1\,;1)$, $\mathrm{B}(3\,;4)$ et $C(8\,;\frac{3}{2})$.

IX-A- La longueur du segment $[AB]$ est $\sqrt{7}$.

Faux.

La longueur du segment $[AB]$ est $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

IX-B- Une équation de la droite (AB) est $3x-4y+7=0$.

Vrai.

L'équation est bien une équation cartésienne de droite.

De plus, $3x_A-4y_A+7=-3-\ 4+7=0$ et $3x_B-4y_B+7=9-\ 16+7=0$.

Donc, cette équation est vérifiée par les coordonnées de deux points distincts de la droite.

Donc l'équation $3x-4y+7=0$ est bien une équation cartésienne de la droite (AB).

IX-C- Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $8x+6y-25=0$.

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(4;3)$ est un vecteur normal à la médiatrice du segment $[AB]$.

Donc une équation cartésienne de cette médiatrice est de la forme : $4x+3y+c=0$.

De plus, cette médiatrice passe par le milieu I du segment $[AB]$ dont les coordonnées sont $I\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1+4}{2}\right)$ soit $I\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

Donc les coordonnées du point I vérifient l'équation cartésienne et on a :

$4x_I+3y_I+c=0 \;\Leftrightarrow 4+\frac{15}{2}+c=0 \;\Leftrightarrow c=\frac{-23}{2}$.

Donc une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $4x+3y-\frac{23}{2}=0$ soit $8x+6y-23=0$.

IX-D- Le projeté orthogonal D du point C sur la droite (AB) a pour coordonnées $\left(5\,;\frac{11}{2}\right)$.

Vrai.

Le projeté orthogonal D du point C sur la droite (AB) est le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire Δ à (AB) passant par C.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(4;3)$ est un vecteur normal à Δ.

Donc une équation cartésienne de Δ est de la forme : $4x+3y+c=0$.

De plus, Δ passe par $C\left(8;\frac{3}{2}\right)$. Donc les coordonnées du point C vérifient l'équation cartésienne et on a $4x_C+3y_C+c=0 \;\Leftrightarrow 32+\frac{9}{2}+c=0 \;\Leftrightarrow c=\frac{-73}{2}$.

Donc une équation de Δ est $4x+3y-\frac{73}{2}=0$ soit $8x+6y-73=0$.

Les coordonnées du point d'intersection vérifient donc le système :

$$\begin{cases}3x-4y+7=0\\8x+6y-73=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x-12y+21=0\\16x+12y-146=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25x-125=0\\3x-4y+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\15-4y+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=\frac{11}{2}\end{cases}.$$