REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

I-1-a- $u_1 = \frac{4}{3}$ $\quad u_2 = \frac{9}{8}$

I-1-b- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et converge vers 1.**

I-2-a- $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. En effet : **Soit n un entier naturel.**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{-u_n{}^2-u_n+2}{u_n+4}.$$

Or $(1-u_n)(u_n+2) = u_n + 2 - u_n{}^2 - 2u_n = -u_n{}^2 - u_n + 2$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

I-2-b- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**. En effet : **Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.**

Donc $1 - u_n \leq 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$.

Ainsi, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

I-3- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En effet : **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1.**

I-4- $l = 1$. En effet : **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.**

Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$.

Donc $l + 4 \neq 0$,

et $u_{n+1} = f(u_n) \Leftrightarrow l = \frac{3l+2}{l+4} \Leftrightarrow l^2 + 4l = 3l + 2 \Leftrightarrow l^2 + l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -2$.

Or $l \geq 1$, donc $l = -2$ est impossible.

I-5- $v_0 = \frac{1}{4}$

I-6-a- $v_{n+1} = k \times v_n$ avec $k = \frac{2}{5}$. En effet : **Pour tout entier naturel n,**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{\frac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2(u_n+4)}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5}\, v_n .$$

On peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique (de raison k = $\frac{2}{5}$).**

I-6-b- $v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

I-6-c- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 0.**

En effet : **$0 < \frac{2}{5} < 1$ (donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$).**

I-7-a- $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$

I-7-b La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 1.**

En effet : **$\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$.**

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

II-1- Solution générale de (E_1) :

$z(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

II-2-

t	0	$+\infty$
Variations de f	$\frac{10}{1+a}$	10

II-3- $f(t) = 5$ pour $t \in \{ln(a)\}$.

En effet : $f(t) = 5 \Leftrightarrow \frac{10}{1+ae^{-t}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{1+ae^{-t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1 + ae^{-t} \Leftrightarrow 1 = ae^{-t} \Leftrightarrow e^{t} = a$

$\Leftrightarrow t = ln(a)$.

II-4-a- Si $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ alors $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$.

II-4-b- z solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ $z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 1)**

$\Leftrightarrow$ $-\frac{y'(t)}{(y(t))^2} + \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 2)**

$\Leftrightarrow$ $y'(t) = y(t) - \frac{(y(t))^2}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 3)**

$\Leftrightarrow$ $y'(t) = y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ pour tout réel t positif $\Leftrightarrow$ y solution de (E_2).

II-5-a- $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{K}+Ce^{-t}} = \frac{K}{1+CKe^{-t}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

II-5-b- $a = \frac{K}{y_0} - 1$

II-6- $a > 0$. En effet : $0 < y_0 < K$ donc $\frac{K}{y_0} > 1$ et $\frac{K}{y_0} - 1 > 0$.

II-7-a- $y(5) = 5$ pour $a = e^5$.

II-7-b- La valeur exacte de y_0 est $y_0 = \frac{10}{e^5+1}$.

En effet : $a = \frac{10}{y_0} - 1$.

Donc $a = e^5 \Leftrightarrow \frac{10}{y_0} - 1 = e^5 \Leftrightarrow \frac{y_0}{10} = \frac{1}{e^5+1} \Leftrightarrow y_0 = \frac{10}{e^5+1}$.

II-7-c- Il faudra réintroduire 67 marmottes.