Mathématiques – QCM (40 points)
Correction

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{(2\sqrt{3})^2\times12^3\times3^2}{3^{-4}\times(\sqrt{2})^4} = 3^{10}\times2^8.$

Faux.

$$\frac{(2\sqrt{3})^2\times12^3\times3^2}{3^{-4}\times(\sqrt{2})^4} = \frac{4\times3\times(4\times3)^3\times3^2}{3^{-4}\times2^2} = \frac{2^2\times3\times(2^2\times3)^3\times3^2}{3^{-4}\times2^2} = \frac{2^2\times3\times2^6\times3^3\times3^2}{3^{-4}\times2^2} = 3^{1+3+2+4}\times2^{2+6-2}$$
$$= 3^{10}\times2^6\,.$$

I-B- $2\sqrt{27}-(2\sqrt{3}-1)^2 = 10\sqrt{3}-13.$

Vrai.

$$2\sqrt{27}-(2\sqrt{3}-1)^2 = 2\sqrt{9\times3}-(4\times3-2\times2\sqrt{3}\times1+1)$$
$$= 2\times3\sqrt{3}-(13-4\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}-13\,.$$

I-C- $ln\left(\frac{e}{4}\right)+ln\left(\frac{1}{9e}\right)+ln(36e) = 1.$

Vrai.

$$ln\left(\frac{e}{4}\right)+ln\left(\frac{1}{9e}\right)+ln(36e) = ln(e)-ln(4)-ln(9e)+ln(36)+ln(e)$$
$$= 1-2ln(2)-ln(9)-ln(e)+2ln(6)+1$$
$$= 2-2ln(2)-2ln(3)-1+2ln(2)+2ln(3) = 1\,.$$

I-D- $e^{2ln3+ln5}+e^{-2ln5} = 20.$

Faux.

$$e^{2ln3+ln5}+e^{-2ln5} = e^{2ln3}\times e^{ln5}+e^{ln5^{-2}} = 3^2\times5+5^{-2} = 45+\frac{1}{25}\neq20\,.$$

I-E- Pour tout nombre réel x différent de -2 et de 2, $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

Vrai.

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{8}{x^2-4} = \frac{2x-4-x-2+8}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}\,.$$

I-F- Pour tout nombre réel x, $\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = e^x+1.$

Vrai.

$$\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)^2}{e^x+1} = e^x+1\,.$$

Deuxième partie – Fonctions

Exercice II

II-A- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ admet pour dérivée $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Faux.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,.$$

II-B- La fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Vrai.

$$F'(x) = \sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}\,.$$

II-C- La fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (ln(3x))^2$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{2}{3x}ln(3x)$.

Faux.

$$f'(x) = 2\times\frac{3}{3x}\times ln(3x) = \frac{2}{x}ln(3x).$$

II-D- $\lim_{x \to 0}(x\,ln(x) - x) = -\infty$.

Faux.

$\lim_{x \to 0}(x\,ln(x)) = 0$ (limite de référence) donc $\lim_{x \to 0}(x\,ln(x) - x) = 0$.

II-E- $\lim_{x \to +\infty}(xe^x - ln(x)) = 0$.

Faux.

$\lim_{x \to +\infty}(xe^x - ln(x)) = \lim_{x \to +\infty}\left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right)$.

Or $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ (limite de référence)

donc $\lim_{x \to +\infty}\left(e^x - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}\left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right) = +\infty$ (par produit).

Exercice III

Soient f la fonction définie pour tout nombre réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{3}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

III-A- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Faux.

$\lim_{x \to 1^-}(1 - x) = 0^+$ donc $\lim_{x \to 1^-}(\frac{1}{1-x}) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

III-B- Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

Faux.

$f(-1) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ donc $f'(-1) = \frac{3}{4}$.

Donc une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}(x + 1) + \frac{3}{2}$ soit $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

III-C- f est concave sur $]1\,;\,+\infty[$.

Vrai.

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ donc $f''(x) = \frac{6}{(1-x)^3}$.

Sur $]1\,;\,+\infty[$, $f''(x) < 0$ donc f est concave sur $]1\,;\,+\infty[$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice IV

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

IV-A- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.

Vrai.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n,

$u_n \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{u_n} \leq 1$ et $\frac{2}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{u_n} \geq -1$, ce qui traduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.

IV-B- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Faux.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 1$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{-2}{n+1}$ est aussi croissante.

IV-C- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Faux.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2(n+1)$ tend vers $-\infty$, ce qui signifie qu'elle diverge.

Quatrième partie – Probabilités

Exercice V

On lance cinq fois un dé à six faces. Cocher VRAI si la variable aléatoire proposée suit une loi binomiale et FAUX dans le cas contraire.

V-A- La variable aléatoire correspondant au nombre de lancers où apparait un numéro pair.
Vrai.

V-B- La variable aléatoire correspondant à la somme des résultats de tous les lancers.
Faux.

Exercice VI

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω.
A et B sont deux événements de probabilités respectives 0,6 et 0,4. On suppose de plus que $P(A \cup B) = 0{,}8$.

VI-A- $P(A \cap B) = 0{,}24$.
Faux.
$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2.}$

VI-B- A et B sont des événements contraires.
Faux.
Si A et B sont des événements contraires, alors ils sont incompatibles et $P(A \cup B) = 1$, ce qui n'est pas le cas.

VI-C- A et B sont des événements indépendants.
Faux.
A et B sont des événements indépendants si, et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui n'est pas le cas.

VI-D- A et B sont des événements incompatibles.
Faux.
Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

On considère les points A et B de coordonnées respectives dans un repère orthonormé : $A(2\,;0)$ et B$(0\,;-4)$.

VII -A- Une équation de la droite (AB) est $2x - y - 4 = 0$.
Vrai.
$\boldsymbol{2x_A - y_A - 4 = 2 \times 2 - 0 - 4 = 0}$ **et** $\boldsymbol{2x_B - y_B - 4 = 2 \times 0 + 4 - 4 = 0.}$
L'équation est vérifiée par deux points distincts de la droite (AB) donc l'équation $2x - y - 4 = 0$ est bien une équation de la droite (AB).

VII -B- Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $x + 2y + 3 = 0$.

Vrai.

La médiatrice Δ du segment $[AB]$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et passe par le milieu $I(1\,;\,-2)$ du segment $[AB]$.

Soit $M(x\,;y)$ un point du plan.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x-4y-6=0 \Leftrightarrow x+2y+3=0.$

VII -C- Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2+y^2-2x-4y=0$.

Faux

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu $I(1\,;\,-2)$ du segment $[AB]$ et pour rayon $R = IA = \sqrt{(2-1)^2+(0+2)^2} = \sqrt{5}$.

Ainsi, l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y = 0.$$

VII -D- Le point de coordonnées $(-1\,;\,-1)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$(-1)^2+(-1)^2-2\times(-1)+4\times(-1) = 0$ donc les coordonnées du point vérifient l'équation du cercle.

VII -E- La droite d'équation $2x-y+1=0$ est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$2\times(-1)-(-1)+1=0$ donc le point P de coordonnées $(-1\,;\,-1)$ est un point d'intersection de cette droite et du cercle.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite.

La droite est donc perpendiculaire au rayon du cercle au point d'intersection, ce qui caractérise bien une tangente au cercle.